MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – Ia feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) `> f:=x-> 1/4*x^4 - 7/3*x^3 + 5*x^2 + 3*x;`

`> r:=x-> D(f)(2)*(x-2)+f(2);  > r(x);` Eq. da reta: $y = 3\,x + 16/3$

(b) `> solve(D(f)(x)=3);` $f'(x) = 3 \iff x = 0$, ou $x = 2$ ou $x = 5$.

`> f(0);  > f(5);`

Ponto: $(0, f(0)) = (0, 0)$. E a eq. da reta: $y = 3\,x$.

Ponto: $(5, f(5)) = \left(5, \dfrac{55}{12}\right)$. E a eq. da reta: $y = 3\,(x - 5) + \frac{55}{12} = 3\,x - \frac{125}{12}$.

(c) `> s:=x->3*x;      > t:=x->3*x-125/12;`

`> plot([f(x), r(x), s(x), t(x)], x=-1..7);`

Sim. As retas são aparentemente paralelas e tangenciam o gráfico em $x = 0$, em $x = 2$ e em $x = 5$. OU

Não. As retas não estão paralelas, e/ou não tangenciam o gráfico.

Questão 2.

(a) f é crescente no intervalo $[-1, 1]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 1)$.

(b) f assume mínimo local em $x = -1$ pois f é decrescente em $[-3, -1]$ e crescente em $[-1, 1]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in [-3, -1)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 1)$.

f assume mínimo local em $x = 3$, pois:
- f é decrescente em $[1, 3]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in (1, 3]$; e
- $x = 3$ é um extremo do domínio de f.

(c) O gráfico de f tem concavidade para baixo no intervalo $[0, 3]$, já que f' é decrescente neste intervalo.

(d) $x = 0$ é a primeira coordenada do único ponto de inflexão do gráfico de f. Pela figura, vemos que em $x = 0$ ocorre a mudança de crescimento de f' e, portanto, a mudança de concavidade do gráfico de f.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x$ e $f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v$.

Como $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ são as raízes de $f''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-2)(x-5) = 12\,x^2 - 84\,x + 120$$

assim, $6\,u = -84$ e $2\,v = 120$. Resposta: $u = -14$ e $v = 60$.

(b)
```
> f:=x->x^4 - 14*x^3 + 60*x^2;
> r:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);      > plot([f(x),r(x)], x=0..5);
> s:=x->D(f)(5)*(x-5)+f(5);      > plot([f(x),s(x)], x=3..7);
```

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 2$ e também em $x_2 = 5$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 2$ e/ou em $x_2 = 5$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 16$ e $h(x) = \dfrac{32}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 27$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{32}{x} \leq 48$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$. Dom$(P) = [2/3,\ 27]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e

$$P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \frac{32}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2}\,.$$

(b)

```
> P:=x->x + 32/x + sqrt( x^2 + (32/x)^2);
```

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in$ Dom$(P) = [2/3,\ 27]$:

```
> solve(D(P)(x)>0);     > solve(D(P)(x)<0);
```

P é decrescente em $[2/3,\ 4\sqrt{2}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [2/3,\ 4\sqrt{2}\,)$.

P é crescente em $[4\sqrt{2},\ 27]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in (4\sqrt{2},\ 27]$.

Logo P tem mínimo em $x = 4\sqrt{2}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – Ib   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) `> f:=x-> 1/4*x^4 - 7/3*x^3 + 5*x^2 + 3*x;`

`> r:=x-> D(f)(5)*(x-5)+f(5);  > r(x);`   Eq. da reta: $y = 3\,x - 125/12$

(b) `> solve(D(f)(x)=3);` $f'(x) = 3 \iff x = 0$, ou $x = 2$ ou $x = 5$.

`> f(0);  > f(2);`

Ponto: $(0, f(0)) = (0, 0)$. E a eq. da reta: $y = 3\,x$.

Ponto: $(2, f(2)) = \left(2, \dfrac{34}{3}\right)$. E a eq. da reta: $y = 3\,(x-2) + \frac{34}{3} = 3\,x + \frac{16}{3}$.

(c) `> s:=x->3*x;`   `> t:=x->3*x+16/3;`

`> plot([f(x), r(x), s(x), t(x)], x=-1..7);`

Sim. As retas são aparentemente paralelas e tangenciam o gráfico em $x = 0$, em $x = 2$ e em $x = 5$.   OU

Não. As retas não estão paralelas, e/ou não tangenciam o gráfico.

Questão 2.

(a) f é decrescente nos intervalos $[-3, -1]$ e $[1, 3]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in [-3, -1) \cup (1, 3]$.

(b) f assume máximo local em $x = 1$, pois f é crescente em [-1, 1] e decrescente em $[1, 3]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 1)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (1, 3]$.

f assume máximo local em $x = -3$, pois
- f é decrescente em $[-3, -1]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in [-3, -1)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(c) O gráfico de f tem concavidade para cima no intervalo $[-3, 0]$, já que f' é crescente neste intervalo.

(d) $x = 0$ é a primeira coordenada do ponto de inflexão do gráfico de f. Pela figura, vemos que em $x = 0$ ocorre a mudança de crescimento de f' e, portanto, a mudança de concavidade do gráfico de f.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x$ e $f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v\,.$

Como $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$ são as raízes de $f''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-3)(x-7) = 12\,x^2 - 120\,x + 252$$

assim, $6\,u = -120$ e $2\,v = 252$. Resposta: $u = -20$ e $v = 126$.

(b) `> f:=x->x^4 - 20*x^3 + 126*x^2;`

```
> r:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);     > plot([f(x),r(x)], x=0..6);
> s:=x->D(f)(7)*(x-7)+f(7);     > plot([f(x),s(x)], x=4..10);
```

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 3$ e também em $x_2 = 7$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 3$ e/ou em $x_2 = 7$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 14$ e $h(x) = \dfrac{28}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 25$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{28}{x} \leq 46$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{28}{46} = \frac{14}{23}$. $\mathrm{Dom}(P) = [14/23,\, 25]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e
$P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{28}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{28}{x}\right)^2}\,.$

(b)

```
> P:=x->x + 28/x + sqrt( x^2 + (28/x)^2);
```

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in \mathrm{Dom}(P) = [14/23,\, 25]$:

```
> solve(D(P)(x)>0);     > solve(D(P)(x)<0);
```

P é decrescente em $[14/23,\, 2\sqrt{7}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [14/23,\, 2\sqrt{7}\,)$.

P é crescente em $[2\sqrt{7},\, 25]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in (2\sqrt{7},\, 25]$.

Logo P tem mínimo em $x = 2\sqrt{7}$.