MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – IIa   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a)
```
> f:=x-> 1/4*x^4 - 10/3*x^3 + 27/2*x^2- 16*x;
> r:=x-> D(f)(1)*(x-1)+f(1);  > r(x);
```
Eq. da reta: $y = 2\,x - 91/12$

(b)
```
> solve(D(f)(x)=2);
```
$f'(x) = 2 \iff x = 1$, ou $x = 3$ ou $x = 6$.
```
> f(3);  > f(6);
```
Ponto: $(3, f(3)) = \left(3,\ \dfrac{15}{4}\right)$. E a eq. da reta: $y = 2\,(x-3) + \frac{15}{4} = 2\,x - \frac{9}{4}$.

Ponto: $(6, f(6)) = (6, -6)$. E a eq. da reta: $y = 2\,(x-6) - 6 = 2\,x - 18$.

(c)
```
> s:=x->2*x - 9/4;        > t:=x->2*x - 18;
> plot([f(x), r(x), s(x), t(x)], x=0..8);
```
Sim. As retas são aparentemente paralelas e tangenciam o gráfico em $x = 1$, em $x = 3$ e em $x = 6$.   OU

Não. As retas não estão paralelas, e/ou não tangenciam o gráfico.

Questão 2.

(a) f é crescente nos intervalos $[-3,-1]$ e $[1,3]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3,-1) \cup (1,3]$.

(b) f assume mínimo local em $x = 1$, pois f é decrescente em [-1, 1] e crescente em $[1,3]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in (-1,1)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (1,3]$.

f assume mínimo local em $x = -3$, pois
- f é crescente em $[-3,-1]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3,-1)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(c) O gráfico de f tem concavidade para baixo no intervalo $[-3,0]$, já que f' é decrescente neste intervalo.

(d) $x = 0$ é a primeira coordenada do ponto de inflexão do gráfico de f. Pela figura, vemos que em $x = 0$ ocorre a mudança de crescimento de f' e, portanto, a mudança de concavidade do gráfico de f.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x \quad$ e $\quad f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v\,.$

Como $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ são as raízes de $f''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-3)(x-8) = 12\,x^2 - 132\,x + 288$$

assim, $6\,u = -132$ e $2\,v = 288$. Resposta: $u = -22$ e $v = 144$.

(b) `> f:=x->x^4 - 22*x^3 + 144*x^2;`

`> r:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);` `> plot([f(x),r(x)], x=0..6);`

`> s:=x->D(f)(8)*(x-8)+f(8);` `> plot([f(x),s(x)], x=4..11);`

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 3$ e também em $x_2 = 8$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 3$ e/ou em $x_2 = 8$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 12$ e $h(x) = \dfrac{24}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 21$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{24}{x} \leq 36$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Dom$(P) = [2/3,\ 21]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e $P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{24}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{24}{x}\right)^2}\,.$

(b)

`> P:=x->x + 24/x + sqrt( x^2 + (24/x)^2);`

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in$ Dom$(P) = [2/3,\ 21]$:

`> solve(D(P)(x)>0);` `> solve(D(P)(x)<0);`

P é decrescente em $[2/3,\ 2\sqrt{6}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [2/3,\ 2\sqrt{6}\,)$.

P é crescente em $[2\sqrt{6},\ 21]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in (2\sqrt{6},\ 21]$.

Logo P tem mínimo em $x = 2\sqrt{6}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – IIb feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) `> f:=x-> 1/4*x^4 - 10/3*x^3 + 27/2*x^2- 16*x;`

`> r:=x-> D(f)(3)*(x-3)+f(3);  > r(x);` Eq. da reta: $y = 2\,x - 9/4$

(b) `> solve(D(f)(x)=2);` $f'(x) = 2 \iff x = 1$, ou $x = 3$ ou $x = 6$.

`> f(1);  > f(6);`

Ponto: $(1, f(1)) = \left(1, -\dfrac{67}{12}\right)$. E a eq. da reta: $y = 2\,(x-1) - \frac{67}{12} = 2\,x - \frac{91}{12}$.

Ponto: $(6, f(6)) = (6, -6)$. E a eq. da reta: $y = 2\,(x-6) - 6 = 2\,x - 18\,$.

(c) `> s:=x->2*x - 91/12;` `> t:=x->2*x - 18;`

`> plot([f(x), r(x), s(x), t(x)], x=0..8);`

Sim. As retas são aparentemente paralelas e tangenciam o gráfico em $x = 1$, em $x = 3$ e em $x = 6$. OU

Não. As retas não estão paralelas, e/ou não tangenciam o gráfico.

Questão 2.

(a) f é decrescente no intervalo $[-1, 1]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$.

(b) f assume máximo local em $x = -1$ pois f é crescente em $[-3, -1]$ e decrescente em $[-1, 1]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -1)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$.

f assume máximo local em $x = 3$, pois:
- f é crescente em $[1, 3]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in (1, 3]$; e
- $x = 3$ é um extremo do domínio de f.

(c) O gráfico de f tem concavidade para cima no intervalo $[0, 3]$, já que f' é crescente neste intervalo.

(d) $x = 0$ é a primeira coordenada do único ponto de inflexão do gráfico de f. Pela figura, vemos que em $x = 0$ ocorre a mudança de crescimento de f' e, portanto, a mudança de concavidade do gráfico de f.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x$ e $f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v\,.$

Como $x_1 = 2$ e $x_2 = 7$ são as raízes de $f''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-2)(x-7) = 12\,x^2 - 108\,x + 168$$

assim, $6\,u = -108$ e $2\,v = 168$. Resposta: $u = -18$ e $v = 84$.

(b)
```
> f:=x->x^4 - 18*x^3 + 84*x^2;
> r:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);     > plot([f(x),r(x)], x=-1..6);
> s:=x->D(f)(7)*(x-7)+f(7);     > plot([f(x),s(x)], x=4..11);
```

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 2$ e também em $x_2 = 7$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 2$ e/ou em $x_2 = 7$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 10$ e $h(x) = \dfrac{20}{x}$.

(a) Domínio: $x \le 15$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{20}{x} \le 34$ (=altura do retângulo), temos e $x \ge \frac{20}{34} = \frac{10}{17}$. Dom$(P) = [10/17,\, 15]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e $P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{20}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{20}{x}\right)^2}\,.$

(b)

```
> P:=x->x + 20/x + sqrt( x^2 + (20/x)^2);
```

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in$ Dom$(P) = [10/17,\, 15]$:

```
> solve(D(P)(x)>0);     > solve(D(P)(x)<0);
```

P é decrescente em $[10/17,\, 2\sqrt{5}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [10/17,\, 2\sqrt{5}\,)$.

P é crescente em $[2\sqrt{5},\, 15]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in (2\sqrt{5},\, 15]$.

Logo P tem mínimo em $x = 2\sqrt{5}$.