MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – IIIa feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (a, f(a)) = (a,\, a^2 + 2)$ tem inclinação $f'(a) = 2\,a$, portanto $y = 2\,a\,(x - a) + a^2 + 2$ é a equação da reta tangente em P.

Esta reta passa por $A = (0, 0) \Leftrightarrow 0 = 2\,a\,(0-a)+a^2+2 \Leftrightarrow 0 = -a^2+2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$.

Portanto as equações são:

$$y = 2\sqrt{2}\,(x - \sqrt{2}) + 4 \qquad \text{e} \qquad y = -2\sqrt{2}\,(x + \sqrt{2}) + 4$$

(b)
```
> f:=x-> x^2 +2;
> r:=x-> 2*sqrt(2)*(x-sqrt(2)) + 4;
> s:=x-> - 2*sqrt(2)*(x+sqrt(2)) + 4;
> plot([f(x), r(x), s(x)], x=-3..3);
```

Sim. As retas são aparentemente tangentes ao gráfico e passam por $A = (0, 0)$. OU

Não. As retas não estão tangentes ao gráfico e/ou não passam por $A = (0, 0)$.

Questão 2.

(a) f é crescente nos intervalos $[-3, -1]$ e $[1, 3]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -1) \cup (1, 3]$.

(b) f assume mínimo local em $x = 1$, pois f é decrescente em [-1, 1] e crescente em $[1, 3]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (1, 3]$.

f assume mínimo local em $x = -3$, pois
- f é crescente em $[-3, -1]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -1)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(c) Não. O gráfico de f possui apenas um ponto de inflexão: $(0, f(0))$. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

(d) Não. A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é horizontal, já que $f'(1) = 0$.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x$ e $f''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$.

Como $P = (2,\,7)$ é ponto de inflexão de f, temos $f''(2) = 0$ e $f(2) = 7$, ou seja, a e b são soluções de

$$\begin{cases} 12\,a + 2\,b = 0 \\ a\,2^3 + b\,2^2 + 5 = 7 \end{cases}$$

```
> solve( { 12*a + 2*b = 0 , a*2^3 + b*2^2 + 5 =7 } );
```

Resposta: $a = -\dfrac{1}{8}$ e $b = \dfrac{3}{4}$.

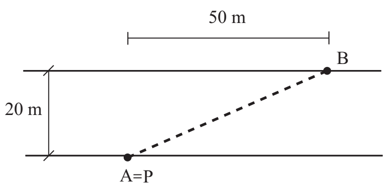
(b)
```
> f:=x->-1/8*x^3 + 3/4*x^2 + 5;
> r:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);     > plot([f(x),r(x)], x=0..5);
```

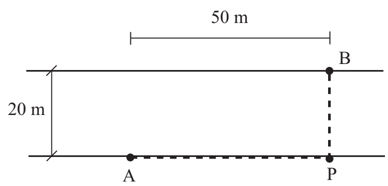
Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $P = (2, 7)$ OU

Não. A reta não tangencia o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $P = (2, 7)$.

Questão 4.

(a) Domínio: Se $A = P$, então $x = 0$. Se P está abaixo de B, então $x = 50$. E $0 < x < 50$, se P está em outra posição.





Seja $l(x)$ a medida do fio utilizado na água, em termos de x. Temos $l(x) = \sqrt{(50-x)^2 + 20^2}$.

Assim, $C(x) = 1 \cdot x + 3 \cdot l(x) = x + 3 \cdot \sqrt{(50-x)^2 + 20^2}$

(b)

```
> C:=x->x + 3*sqrt( (50-x)^2 + 20 ^2);
```

Vamos estudar o sinal de $C'(x)$ para $x \in \mathrm{Dom}(C) = [0,\,50]$:

```
> solve(D(C)(x)>0);     > solve(D(C)(x)<0);
```

C é decrescente em $[0,\,50 - 5\sqrt{2}\,]$, pois $C'(x) < 0$ quando $x \in [0,\,50 - 5\sqrt{2}\,)$.

C é crescente em $[50 - 5\sqrt{2},\,50]$, pois $C'(x) > 0$ quando $x \in (50 - 5\sqrt{2},\,50]$.

Logo C tem mínimo em $x = 50 - 5\sqrt{2}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – IIIb   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (a, f(a)) = (a,\, a^2 + 3)$ tem inclinação $f'(a) = 2\,a$, portanto $y = 2\,a\,(x - a) + a^2 + 3$ é a equação da reta tangente em P.

Esta reta passa por $A = (0, 0) \Leftrightarrow 0 = 2\,a\,(0-a)+a^2+3 \Leftrightarrow 0 = -a^2+3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$.

Portanto as equações são:

$$y = 2\sqrt{3}\,(x - \sqrt{3}) + 6 \qquad \text{e} \qquad y = -2\sqrt{3}\,(x + \sqrt{3}) + 6$$

(b)
```
> f:=x-> x^2 +3;
> r:=x-> 2*sqrt(3)*(x-sqrt(3)) + 6;
> s:=x-> - 2*sqrt(3)*(x+sqrt(3)) + 6;
> plot([f(x), r(x), s(x)], x=-3..3);
```

Sim. As retas são aparentemente tangentes ao gráfico e passam por $A = (0, 0)$.   OU

Não. As retas não estão tangentes ao gráfico e/ou não passam por $A = (0, 0)$.

Questão 2.

(a) f é decrescente no intervalo $[-1, 1]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$.

(b) f assume máximo local em $x = -1$ pois f é crescente em $[-3, -1]$ e decrescente em $[-1, 1]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -1)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$.

f assume máximo local em $x = 3$, pois:
- f é crescente em $[1, 3]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in (1, 3]$; e
- $x = 3$ é um extremo do domínio de f.

(c) Não. O gráfico de f possui apenas um ponto de inflexão: $(0, f(0))$. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

(d) Não. A reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$ é horizontal, já que $f'(-1) = 0$.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x$ e $f''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$.

Como $P = (2,\,3)$ é ponto de inflexão de f, temos $f''(2) = 0$ e $f(2) = 3$, ou seja, a e b são soluções de

$$\begin{cases} 12\,a + 2\,b = 0 \\ a\,2^3 + b\,2^2 + 5 = 3 \end{cases}$$

```
> solve( { 12*a + 2*b = 0 , a*2^3 + b*2^2 + 5 =7 } );
```

Resposta: $a = \dfrac{1}{8}$ e $b = -\dfrac{3}{4}$.

(b)
```
> f:=x->1/8*x^3 - 3/4*x^2 + 5;
```

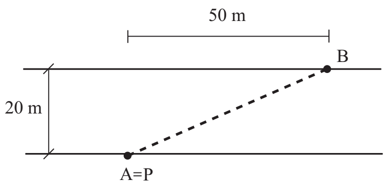
```
> r:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);     > plot([f(x),r(x)], x=0..5);
```

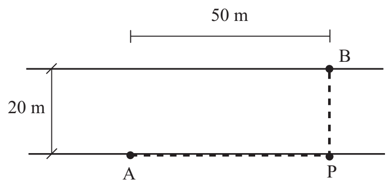
Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $P = (2, 7)$ OU

Não. A reta não tangencia o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $P = (2, 7)$.

Questão 4.

(a) Domínio: Se $A = P$, então $x = 0$. Se P está abaixo de B, então $x = 50$. E $0 < x < 50$, se P está em outra posição.





Seja $l(x)$ a medida do fio utilizado na água, em termos de x. Temos $l(x) = \sqrt{(50-x)^2 + 20^2}$.

Assim, $C(x) = 1 \cdot x + 2 \cdot l(x) = x + 2 \cdot \sqrt{(50-x)^2 + 20^2}$

(b)

```
> C:=x->x + 2*sqrt( (50-x)^2 + 20 ^2);
```

Vamos estudar o sinal de $C'(x)$ para $x \in \mathrm{Dom}(C) = [0,\,50]$:

```
> solve(D(C)(x)>0);     > solve(D(C)(x)<0);
```

C é decrescente em $[0,\,50 - (20/3)\sqrt{3}\,]$, pois $C'(x) < 0$ quando $x \in [0,\,50 - (20/3)\sqrt{3}\,)$.

C é crescente em $[50 - (20/3)\sqrt{3},\,50]$, pois $C'(x) > 0$ quando $x \in (50 - (20/3)\sqrt{3},\,50]$.

Logo C tem mínimo em $x = 50 - (20/3)\sqrt{3}$.