MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – IVa   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) `> f:=x-> x^3 + 45*x^2 + 350*x + 3000;`

`> r:=x-> -82*x + 4728;`

`> solve(D(f)(x) = -82);` $f'(x) = -82 \iff x = -6$ ou $x = -24$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -6$ ou em $x = -24$.

`> f(-6); r(-6); f(-24); r(-24);`

Como $f(-6) \neq r(-6)$, a reta não é tangente em $x = -6$.

Como $f(-24) = r(-24) = 6696$ e $f'(-24) = -82$, a reta de equação $y = -82\,x + 4728 = -82\,(x + 24) + 6696$ é tangente ao gráfico de f em $x = -24$ e o ponto de tangência é $P = (-24,\ f(-24)) = (-24, 6696)$.

(b) `> s:=x-> -83*x + 1806;`

`> solve(D(f)(x) = -83);` $f'(x) = -83 \Leftrightarrow x = -15 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou $x = -15 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -15 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou em $x = -15 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

`> evalf(f(-15-(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-15-(11/3)*sqrt(6)));`

`> evalf(f(-15+(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-15+(11/3)*sqrt(6)));`

Como $f(-15 - (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-15 - (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -15 - (11/3)\sqrt{6}$.
E Como $f(-15 + (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-15 + (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -15 + (11/3)\sqrt{6}$.

Logo a reta não é tangente ao gráfico de f.

Questão 2.

(a) Falso. Em $x = -3$, f assume máximo local pois:
- f é decrescente em $[-3, -2]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in [-3, -2)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(b) Verdadeiro. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

(c) Falso. $f''(-\frac{1}{2}) > 0$ pois a reta tangente ao gráfico de f' em $x = -\frac{1}{2}$ tem inclinação positiva.

(d) Falso. A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem inclinação positiva, já que $f'(1) > 0$.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x \quad$ e $\quad f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v\,.$

Como $f''(2) = 0$, temos $f''(x) = 12\,(x-2)(x-a)$, para algum a. Como f não tem troca de concavidade, $f''(x)$ só pode ter raiz com valor 2, logo $a = 2$. Temos $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-2)^2 = 12\,x^2 - 48\,x + 48$$

assim, $6\,u = -48 \quad$ e $\quad 2\,v = 48$. Resposta: $u = -8$ e $v = 24$.

(b) `> f:=x->x^4 - 8*x^3 + 24*x^2;`

(b.1) `> D(D(f))(2);`

$f''(2) = 0$

(b.2) `> r:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);` `> plot([f(x),r(x)], x=-1..5);`

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente não muda em torno de $x = 2$. OU

Não. A reta não tangencia o gráfico, e/ou há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 2$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 12$ e $h(x) = \dfrac{24}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 20$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{24}{x} \leq 40$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$. $\mathrm{Dom}(P) = [3/5,\, 20]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (h(x))^2$ e

$$P(x) = x + 2\,l(x) = x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{x}\right)^2}\,.$$

(b)

`> P:=x->x+2*sqrt((x/2))^2 + (24/x)^2);`

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in \mathrm{Dom}(P) = [3/5,\, 20]$:

`> solve(D(P)(x)>0);` `> solve(D(P)(x)<0);`

P é decrescente em $[3/5,\, 4\sqrt[4]{3}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [3/5,\, 4\sqrt[4]{3}\,)$.

P é crescente em $[4\sqrt[4]{3},\, 20]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in (4\sqrt[4]{3},\, 20]$.

Logo P tem mínimo em $x = 4\sqrt[4]{3}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – IVb   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1. (a) `> f:=x-> x^3 + 45*x^2 + 350*x + 3000;`

`> s:=x-> -83*x + 1806;`

`> solve(D(f)(x) = -83);` $f'(x) = -83 \Leftrightarrow x = -15 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou $x = -15 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -15 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou em $x = -15 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

`> evalf(f(-15-(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-15-(11/3)*sqrt(6)));`

`> evalf(f(-15+(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-15+(11/3)*sqrt(6)));`

Como $f(-15 - (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-15 - (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -15 - (11/3)\sqrt{6}$.
E como $f(-15 + (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-15 + (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -15 + (11/3)\sqrt{6}$.

Logo a reta não é tangente ao gráfico de f.

(b) `> r:=x-> -82*x + 4728;`

`> solve(D(f)(x) = -82);` $f'(x) = -82 \iff x = -6$ ou $x = -24$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -6$ ou em $x = -24$.

`> f(-6); r(-6); f(-24); r(-24);`

Como $f(-6) \neq r(-6)$, a reta não é tangente em $x = -6$.

Como $f(-24) = r(-24) = 6696$ e $f'(-24) = -82$, a reta de equação $y = -82\,x + 4728 = -82\,(x + 24) + 6696$ é tangente ao gráfico de f em $x = -24$ e o ponto de tangência é $P = (-24,\, f(-24)) = (-24, 6696)$.

Questão 2.

(a) Falso. Em $x = -3$, f assume mínimo local pois:
- f é crescente em $[-3, -2]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -2)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(b) Verdadeiro. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

(c) Falso. $f''(-\frac{1}{2}) < 0$ pois a reta tangente ao gráfico de f' em $x = -\frac{1}{2}$ tem inclinação negativa.

(d) Falso. A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem inclinação negativa, já que $f'(1) < 0$.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x$ e $f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v$.

Como $f''(3) = 0$, temos $f''(x) = 12\,(x-3)(x-a)$, para algum a. Como f não tem troca de concavidade, $f''(x)$ só pode ter raiz com valor 3, logo $a = 3$. Temos $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-3)^2 = 12\,x^2 - 72\,x + 108$$

assim, $6\,u = -72$ e $2\,v = 108$. Resposta: $u = -12$ e $v = 54$.

(b) `> f:=x->x^4 - 12*x^3 + 54*x^2;`

(b.1) `> D(D(f))(3);`

$f''(3) = 0$

(b.2) `> r:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);` `> plot([f(x),r(x)], x=-1..7);`

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente não muda em torno de $x = 3$. OU

Não. A reta não tangencia o gráfico, e/ou há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 3$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 10$ e $h(x) = \dfrac{20}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 18$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{20}{x} \leq 40$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. $\mathrm{Dom}(P) = [1/2,\ 18]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (h(x))^2$ e

$$P(x) = x + 2\,l(x) = x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{20}{x}\right)^2}\,.$$

(b)

`> P:=x->x+2*sqrt((x/2))^2 + (20/x)^2);`

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in \mathrm{Dom}(P) = [1/2,\ 18]$:

`> solve(D(P)(x)>0);` `> solve(D(P)(x)<0);`

P é decrescente em $[1/2,\ (2/3)\sqrt{10}\,\sqrt[4]{27}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [1/2,\ (2/3)\sqrt{10}\,\sqrt[4]{27}\,)$.

P é crescente em $[(2/3)\sqrt{10}\,\sqrt[4]{27},\ 18]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in ((2/3)\sqrt{10}\,\sqrt[4]{27},\ 18]$.

Logo P tem mínimo em $x = (2/3)\sqrt{10}\,\sqrt[4]{27}$.