MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – Va   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) `> f:=x-> x^3 + 48*x^2 + 443*x + 3396;`

`> r:=x-> -82*x + 4646;`

`> solve(D(f)(x) = -82);` $f'(x) = -82 \iff x = -7$ ou $x = -25$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -7$ ou em $x = -25$.

`> f(-7); r(-7); f(-25); r(-25);`

Como $f(-7) \neq r(-7)$, a reta não é tangente em $x = -7$.

Como $f(-25) = r(-25) = 6696$ e $f'(-25) = -82$, a reta de equação $y = -82\,x + 4848 = -82\,(x + 25) + 6696$ é tangente ao gráfico de f em $x = -25$ e o ponto de tangência é $P = (-25,\, f(-25)) = (-25, 6696)$.

(b) `> s:=x-> -83*x + 1723;`

`> solve(D(f)(x) = -83);` $f'(x) = -83 \Leftrightarrow x = -16 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou $x = -16 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -15 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou em $x = -15 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

`> evalf(f(-16-(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-16-(11/3)*sqrt(6)));`

`> evalf(f(-16+(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-16+(11/3)*sqrt(6)));`

Como $f(-16 - (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-16 - (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -16 - (11/3)\sqrt{6}$.
E como $f(-16 + (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-16 + (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -16 + (11/3)\sqrt{6}$.

Logo a reta não é tangente ao gráfico de f.

Questão 2.

(a) Falso. Em $x = -3$, f assume máximo local pois:
- f é decrescente em $[-3, -1]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in [-3, -1)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(b) Verdadeiro. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

(c) Falso. $f''(\frac{3}{2}) < 0$ pois a reta tangente ao gráfico de f' em $x = \frac{3}{2}$ tem inclinação negativa.

(d) Falso. A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é horizontal, já que $f'(1) = 0$.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x \quad$ e $\quad f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v\,.$

Como $f''(5) = 0$, temos $f''(x) = 12\,(x-5)(x-a)$, para algum a. Como f não tem troca de concavidade, $f''(x)$ só pode ter raiz com valor 5, logo $a = 5$. Temos $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-5)^2 = 12\,x^2 - 120\,x + 300$$

assim, $6\,u = -120$ e $2\,v = 300$. Resposta: $u = -20$ e $v = 150$.

(b) `> f:=x->x^4 - 20*x^3 + 150*x^2;`

(b.1) `> D(D(f))(5);`

$f''(5) = 0$

(b.2) `> r:=x->D(f)(5)*(x-5)+f(5);` `> plot([f(x),r(x)], x=-1..11);`

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente não muda em torno de $x = 5$. OU

Não. A reta não tangencia o gráfico, e/ou há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 5$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 14$ e $h(x) = \dfrac{28}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 22$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{28}{x} \leq 46$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{28}{46} = \frac{14}{23}$. $\mathrm{Dom}(P) = [14/23,\, 22]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (h(x))^2$ e

$$P(x) = x + 2\,l(x) = x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{28}{x}\right)^2}\,.$$

(b)

`> P:=x->x+2*sqrt((x/2))^2 + (28/x)^2);`

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in \mathrm{Dom}(P) = [14/23,\, 22]$:

`> solve(D(P)(x)>0);` `> solve(D(P)(x)<0);`

P é decrescente em $[14/23,\, (2/3)\sqrt{14}\,\sqrt[4]{27}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [14/23,\, (2/3)\sqrt{14}\,\sqrt[4]{27}\,)$.

P é crescente em $[(2/3)\sqrt{14}\,\sqrt[4]{27},\, 22]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in ((2/3)\sqrt{14}\,\sqrt[4]{27},\, 22]$.

Logo P tem mínimo em $x = (2/3)\sqrt{14}\,\sqrt[4]{27}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G2 – Vb   feita em 22 outubro de 2012

Questão 1.

(a) `> f:=x-> x^3 + 48*x^2 + 443*x + 3396;`

`> s:=x-> -83*x + 1723;`

`> solve(D(f)(x) = -83);` $f'(x) = -83 \Leftrightarrow x = -16 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou $x = -16 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -15 - \frac{11}{3}\sqrt{6}$ ou em $x = -15 + \frac{11}{3}\sqrt{6}$.

`> evalf(f(-16-(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-16-(11/3)*sqrt(6)));`

`> evalf(f(-16+(11/3)*sqrt(6))); evalf(s(-16+(11/3)*sqrt(6)));`

Como $f(-16 - (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-16 - (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -16 - (11/3)\sqrt{6}$.
E como $f(-16 + (11/3)\sqrt{6}) \neq s(-16 + (11/3)\sqrt{6})$, a reta não é tangente em $x = -16 + (11/3)\sqrt{6}$.

Logo a reta não é tangente ao gráfico de f.

(b) `> r:=x-> -82*x + 4646;`

`> solve(D(f)(x) = -82);` $f'(x) = -82 \iff x = -7$ ou $x = -25$.

Portanto, se a reta é tangente, então é tangente em $x = -7$ ou em $x = -25$.

`> f(-7); r(-7); f(-25); r(-25);`

Como $f(-7) \neq r(-7)$, a reta não é tangente em $x = -7$.

Como $f(-25) = r(-25) = 6696$ e $f'(-25) = -82$, a reta de equação $y = -82\,x + 4848 = -82\,(x + 25) + 6696$ é tangente ao gráfico de f em $x = -25$ e o ponto de tangência é $P = (-25,\ f(-25)) = (-25, 6696)$.

Questão 2.

(a) Falso. Em $x = -3$, f assume mínimo local pois:
- f é crescente em $[-3, -1]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -1)$; e
- $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

(b) Verdadeiro. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

(c) Falso. $f''(\frac{3}{2}) > 0$ pois a reta tangente ao gráfico de f' em $x = \frac{3}{2}$ tem inclinação positiva.

(d) Falso. A reta tangente ao gráfico de f em $x = -1$ é horizontal, já que $f'(-1) = 0$.

Questão 3.

(a) $f'(x) = 4\,x^3 + 3\,u\,x^2 + 2\,v\,x$ e $f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v\,.$

Como $f''(6) = 0$, temos $f''(x) = 12\,(x-6)(x-a)$, para algum a. Como f não tem troca de concavidade, $f''(x)$ só pode ter raiz com valor 6, logo $a = 6$. Temos $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 12\,x^2 + 6\,u\,x + 2\,v = 12\,(x-6)^2 = 12\,x^2 - 144\,x + 432$$

assim, $6\,u = -144$ e $2\,v = 432$. Resposta: $u = -24$ e $v = 216$.

(b) `> f:=x->x^4 - 24*x^3 + 216*x^2;`

(b.1) `> D(D(f))(6);`

$f''(6) = 0$

(b.2) `> r:=x->D(f)(6)*(x-6)+f(6);` `> plot([f(x),r(x)], x=-1..13);`

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente não muda em torno de $x = 6$. OU

Não. A reta não tangencia o gráfico, e/ou há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 6$.

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 8$ e $h(x) = \dfrac{16}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 16$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \frac{16}{x} \leq 34$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$. $\text{Dom}(P) = [8/17,\, 16]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (h(x))^2$ e

$$P(x) = x + 2\,l(x) = x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2}\,.$$

(b)

`> P:=x->x+2*sqrt((x/2))^2 + (16/x)^2);`

Vamos estudar o sinal de $P'(x)$ para $x \in \text{Dom}(P) = [8/17,\, 16]$:

`> solve(D(P)(x)>0);` `> solve(D(P)(x)<0);`

P é decrescente em $[8/17,\, (4/3)\sqrt{2}\,\sqrt[4]{27}\,]$, pois $P'(x) < 0$ quando $x \in [8/17,\, (4/3)\sqrt{2}\,\sqrt[4]{27}\,)$.

P é crescente em $[(4/3)\sqrt{2}\,\sqrt[4]{27},\, 16]$, pois $P'(x) > 0$ quando $x \in ((4/3)\sqrt{2}\,\sqrt[4]{27},\, 16]$.

Logo P tem mínimo em $x = (4/3)\sqrt{2}\,\sqrt[4]{27}$.