MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Ia   feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$$f'(x) = \cos(x) + 3\,\text{sen}\,(3\,x) \qquad P'(x) = b + 2\,c\,(x - 22,1) + 3\,d\,(x - 22,1)^2$$

$$f''(x) = -\,\text{sen}\,(x) + 9\cos(3\,x) \qquad P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 22,1)$$

$$f'''(x) = -\cos(x) - 27\,\text{sen}\,(3\,x) \qquad P'''(x) = 6\,d$$

Fazendo $f(22,1) = P(22,1)$, $f'(22,1) = P'(22,1)$, $f''(22,1) = P''(22,1)$ e $f'''(22,1) = P'''(22,1)$, temos

$$a = \text{sen}\,(22,1) - \cos(66,3) + \cos(1);$$

$$b = \cos(22,1) + 3\,\text{sen}\,(66,3);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-\,\text{sen}\,(22,1) + 9\cos(66,3)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(-\cos(22,1) - 27\,\text{sen}\,(66,3)\right).$$

(b)
```
> f:= x-> sin(x) - cos(3*x) + cos(1);
> a:= sin(221/10) - cos(663/10) + cos(1) ;
> b:= cos(221/10) + 3*sin(663/10) ;
> c:= 1/2*( -sin(221/10) + 9*cos(663/10) );
> d:= 1/6*( - cos(221/10) - 27*sin(663/10) );
> P:= x-> a + b*(x-221/10)+ c*(x-221/10)^2 + d*(x-221/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=20..24);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=20..24);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 22,1$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 22,1$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 22,1$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 22,1$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 22,1$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 22,1$.

Questão 2.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/3)+cos(x/3);
> g:=x->-1/300*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1;
```

(a) $-0,4 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,5 \iff -0,5 + f(x) < g(x) < 0,4 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.5, f(x)+0.4, g(x)],x=-35..10);`" é possível afirmar que $-0,5+f(x) < g(x) < 0,4+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-35, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-35, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-35, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-35, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.5, f(x)+0.4], x=-31..-28);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.4, x=-31..-28);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.5, x=-31..-28);
```

Assim, temos $S_1 = (-29,689; -29,363)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.5, f(x)+0.4], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.5, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.5, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,7470; 5,0476)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-35, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,5 - 2 < g(x) < 0,4 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.4);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.5);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -35)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,4 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,5$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-29,689; -29,363) \cup (-2,7470; 5,0476)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,9 \leq g(x) - f(x) \leq 0,9$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.9, f(x)+0.9, g(x)],x=-35..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-35, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-35, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-35, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-35, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.9, f(x)+0.9], x=-31..-28);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.9, x=-31..-28);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.9, x=-31..-28);
```

Assim, temos $S_1 = [-29,864; -29,214]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.9, f(x)+0.9], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.9, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.9, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-3,7309; 5,9398]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-35, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,9 - 2 < g(x) < 0,9 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.9);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.9);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -35)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -29,864) \cup (-29,214; -3,7309) \cup (5,9398; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{40}{3}x^3 - \frac{145}{2}x^2 + 900x - 1000\,.$$

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b)
```
> f:=x->5/4*x^4 - 40/3*x^3 -145/2*x^2 + 900*x - 1000;
```

```
>D(f)(9);
```

Como $f'(9) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 9$ é horizontal e paralela ao eixo x, portanto não existe x_1 e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-9..12);`" vemos as quatro soluções de $f(x) = 0$ e vemos que podemos tomar $x_0 = 10$:

```
>x[0]:=10.0; for n from 0 to 6 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 10$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 10,18518518\,,\quad x_2 = 10,16766615 \quad \text{e} \quad x_3 = 10,16749898\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 10$, podemos escolher o termo $x_6 = 10,16749894$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_6 e x_7 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Ib feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$$f'(x) = 3\cos(3\,x) + \operatorname{sen}(x) \qquad P'(x) = b + 2\,c\,(x - 22{,}1) + 3\,d\,(x - 22{,}1)^2$$

$$f''(x) = -9\operatorname{sen}(3\,x) + \cos(x) \qquad P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 22{,}1)$$

$$f'''(x) = -27\cos(3\,x) - \operatorname{sen}(x) \qquad P'''(x) = 6\,d$$

Fazendo $f(22{,}1) = P(22{,}1)$, $f'(22{,}1) = P'(22{,}1)$, $f''(22{,}1) = P''(22{,}1)$ e $f'''(22{,}1) = P'''(22{,}1)$, temos

$$a = \operatorname{sen}(66{,}3) - \cos(22{,}1) - \cos(1);$$

$$b = 3\cos(66{,}3) + \operatorname{sen}(22{,}1);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-9\operatorname{sen}(66{,}3) + \cos(22{,}1)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(-27\cos(66{,}3) - \operatorname{sen}(22{,}1)\right).$$

(b)

```
> f:= x-> sin(3*x) - cos(x) - cos(1);
> a:= sin(663/10) - cos(221/10) - cos(1) ;
> b:= 3*cos(663/10) + sin(221/10) ;
> c:= 1/2*( -9*sin(663/10) + cos(221/10) );
> d:= 1/6*( - 27*cos(663/10) - sin(221/10) );
> P:= x-> a + b*(x-221/10)+ c*(x-221/10)^2 + d*(x-221/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=20..24);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=20..24);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 22{,}1$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 22{,}1$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 22{,}1$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 22{,}1$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 22{,}1$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 22{,}1$.

Questão 2.

Temos $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/3)+cos(x/3);
> g:=x->-1/300*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1;
```

(a) $-0,5 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,4 \iff -0,6 + f(x) < g(x) < 0,3 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.6, f(x)+0.3, g(x)],x=-35..10);`" é possível afirmar que $-0,6+f(x) < g(x) < 0,3+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-35, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-35, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-35, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-35, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.3], x=-31..-28);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.3, x=-31..-28);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-31..-28);
```

Assim, temos $S_1 = (-29,654; -29,326)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.3], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-3,0301; 5,3074)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-35, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,6 - 2 < g(x) < 0,3 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.3);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.6);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -35)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,5 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,4$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-29,654; -29,326) \cup (-3,0301; 5,3074)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,8 \leq g(x) - f(x) \leq 0,8$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.8, f(x)+0.8, g(x)],x=-35..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-35, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-35, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-35, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-35, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.8, f(x)+0.8], x=-31..-28);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.8, x=-31..-28);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.8, x=-31..-28);
```

Assim, temos $S_1 = [-29,830; -29,251]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.8, f(x)+0.8], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.8, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.8, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-3,5167; 5,7482]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-35, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,8 - 2 < g(x) < 0,8 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.8);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.8);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -35)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -29,830) \cup (-29,251; -3,5167) \cup (5,7482; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{40}{3}x^3 - \frac{145}{2}x^2 + 900x - 1000\,.$$

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) `> f:=x->5/4*x^4 - 40/3*x^3 -145/2*x^2 + 900*x - 1000;`

`>D(f)(4);`

Como $f'(4) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 4$ é horizontal e paralela ao eixo x, portanto não existe x_1 e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-9..12);`" vemos as quatro soluções de $f(x) = 0$ e vemos que podemos tomar $x_0 = 1,5$:

```
>x[0]:=1.5; for n from 0 to 4 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 1,5$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 1,256794872\,, \quad x_2 = 1,266953927 \quad \text{e} \quad x_3 = 1,266971225\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 1,5$, podemos escolher o termo $x_4 = 1,266971226$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_4 e x_5 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.