MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIa   feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$f'(x) = 2\cos(4\,x) + \operatorname{sen}(x)$	$P'(x) = b + 2\,c\,(x - 32,1) + 3\,d\,(x - 32,1)^2$
$f''(x) = -8\operatorname{sen}(4\,x) + \cos(x)$	$P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 32,1)$
$f'''(x) = -32\cos(4\,x) - \operatorname{sen}(x)$	$P'''(x) = 6\,d$

Fazendo $f(32,1) = P(32,1)$, $f'(32,1) = P'(32,1)$, $f''(32,1) = P''(32,1)$ e $f'''(32,1) = P'''(32,1)$, temos

$a = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(128,4) - \cos(32,1);$

$b = 2\cos(128,4) + \operatorname{sen}(32,1);$

$c = \frac{1}{2}\left(-8\operatorname{sen}(128,4) + \cos(32,1)\right);$

$d = \frac{1}{6}\left(-32\cos(128,4) - \operatorname{sen}(32,1)\right).$

(b)
```
> f:= x-> 1/2*sin(4*x) - cos(x);
> a:= 1/2*sin(1284/10) - cos(321/10) ;
> b:= 2*cos(1284/10) + sin(321/10) ;
> c:= 1/2*( -8*sin(1284/10) + cos(321/10) );
> d:= 1/6*( - 32*cos(1284/10) - sin(321/10) );
> P:= x-> a + b*(x-321/10)+ c*(x-321/10)^2 + d*(x-321/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=30..34);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=30..34);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 32,1$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

Questão 2.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/3)+cos(x/3);
> g:=x->-1/400*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1;
```

(a) $-0,4 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,5 \iff -0,5 + f(x) < g(x) < 0,4 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.5, f(x)+0.4, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $-0,5+f(x) < g(x) < 0,4+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-40, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-40, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-40, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-40, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.5, f(x)+0.4], x=-40..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.4, x=-40..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.5, x=-40..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-38,787; -38,588)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.5, f(x)+0.4], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.5, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.5, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,6975; 5,3787)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-40, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,5 - 2 < g(x) < 0,4 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.4);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.5);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -40)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,4 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,5$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-38,787; -38,588) \cup (-2,6975; 5,3787)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,9 \leq g(x) - f(x) \leq 0,9$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.9, f(x)+0.9, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-40, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-40, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-40, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-40, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.9, f(x)+0.9], x=-40..-37);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.9, x=-40..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.9, x=-40..-37);
```

Assim, temos $S_1 = [-38,895; -38,499]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.9, f(x)+0.9], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.9, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.9, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-3,6463; 6,2938]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-40, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,9 - 2 < g(x) < 0,9 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.9);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.9);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -40)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -38,895) \cup (-38,499; -3,6463) \cup (6,2938; +\infty) .$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{40}{3}x^3 - \frac{145}{2}x^2 - 900x - 1000\,.$$

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) `> f:=x->5/4*x^4 + 40/3*x^3 -145/2*x^2 - 900*x - 1000;`

`>D(f)(4);`

Como $f'(-9) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = -9$ é horizontal e paralela ao eixo x, portanto não existe x_1 e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-11..10);`" vemos as quatro soluções de $f(x) = 0$ e vemos que podemos tomar $x_0 = -10$:

```
>x[0]:=-10.0; for n from 0 to 6 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = -10$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = -10,18518518\,,\quad x_2 = -10,16766615 \quad \text{e} \quad x_3 = -10,16749898\ .$$

(c.3) Com $x_0 = -10$, podemos escolher o termo $x_6 = -10,16749894$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_6 e x_7 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIb feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$$f'(x) = -2\operatorname{sen}(4x) - \cos(x)$$

$$f''(x) = -8\cos(4x) + \operatorname{sen}(x)$$

$$f'''(x) = 32\operatorname{sen}(4x) + \cos(x)$$

$$P'(x) = b + 2c(x-32,1) + 3d(x-32,1)^2$$

$$P''(x) = 2c + 6d(x-32,1)$$

$$P'''(x) = 6d$$

Fazendo $f(32,1) = P(32,1)$, $f'(32,1) = P'(32,1)$, $f''(32,1) = P''(32,1)$ e $f'''(32,1) = P'''(32,1)$, temos

$$a = \tfrac{1}{2}\cos(128,4) - \operatorname{sen}(32,1);$$

$$b = -2\operatorname{sen}(128,4) - \cos(32,1);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-8\cos(128,4) + \operatorname{sen}(32,1)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(32\operatorname{sen}(128,4) + \cos(32,1)\right).$$

(b)

```
> f:= x-> 1/2*cos(4*x) - sin(x);
> a:= 1/2*cos(1284/10) - sin(321/10) ;
> b:= -2*sin(1284/10) - cos(321/10) ;
> c:= 1/2*( -8*cos(1284/10) + sin(321/10) );
> d:= 1/6*( 32*sin(1284/10)+ cos(321/10) );
> P:= x-> a + b*(x-321/10)+ c*(x-321/10)^2 + d*(x-321/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=30..34);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=30..34);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 32,1$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

Questão 2.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/3)+cos(x/3);
> g:=x->-1/400*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1;
```

(a) $-0,5 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,4 \iff -0,6 + f(x) < g(x) < 0,3 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.6, f(x)+0.3, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $-0,6+f(x) < g(x) < 0,3+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-40, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-40, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-40, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-40, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.3], x=-40..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.3, x=-40..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-40..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-38,765; -38,566)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.3], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,9709; 5,6460)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-40, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,6 - 2 < g(x) < 0,3 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.3);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.6);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -40)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,5 < g(x) - f(x) + 0,1 < 0,4$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-38,765; -38,566) \cup (-2,9709; 5,6460)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,8 \leq g(x) - f(x) \leq 0,8$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.8, f(x)+0.8, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-40, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-40, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-40, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-40, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.8, f(x)+0.8], x=-40..-37);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.8, x=-40..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.8, x=-40..-37);
```

Assim, temos $S_1 = [-38,873; -38,522]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.8, f(x)+0.8], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.8, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.8, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-3,4401; 6,0979]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-40, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,8 - 2 < g(x) < 0,8 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.8);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.8);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -40)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -38,873) \cup (-38,522; -3,4401) \cup (6,0979; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{40}{3}x^3 - \frac{145}{2}x^2 - 900x - 1000\,.$$

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) `> f:=x->5/4*x^4 + 40/3*x^3 -145/2*x^2 - 900*x - 1000;`

`>D(f)(4);`

Como $f'(-4) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = -4$ é horizontal e paralela ao eixo x, portanto não existe x_1 e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-11..10);`" vemos as quatro soluções de $f(x) = 0$ e vemos que podemos tomar $x_0 = -1,5$:

```
>x[0]:=-1.5; for n from 0 to 4 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = -1,5$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = -1,256794872\,,\ \ x_2 = -1,266953927$ e $x_3 = -1,266971225$.

(c.3) Com $x_0 = -1,5$, podemos escolher o termo $x_4 = -1,266971226$, , pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_4 e x_5 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.