# Gabarito da P4, 2011.2

## Questão 1

Para usar o Teorema de Green, “fechamos”o semi-círculo, $C_1$, com o segmento orientado $C_2$ ligando $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo do eixo $Ox$.

Agora $C_1 \cup C_2$ é um caminho fechado liso por partes e percorrido no sentido anti-horário, delimitando um semi-disco $D$. Então, temos:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1 \cup C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \big(\partial_x Q - \partial_y P\big) dx\, dy$$
$$= \iint dx, dy = A(D) = \frac{\pi}{2}.$$

Mas $C_2 : \mathbf{r}(t) = (t, 0), \quad t \in [-1, 1]$ e portanto:

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (2t^2, 1 + t) \cdot (1, 0)\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} 2t^2 dt = \frac{4}{3}.$$

Finalmente,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

## Questão 2

Os parabolóides se intersectam no círculo de equação $x^2 + y^2 = 5$, situado no plano $z = 5$. Assim, podemos avaliar a integral de linha usando o Teorema de Stokes, onde a superfície $S$ pode ser tomada como o disco $x^2 + y^2 \leq 5$, situado no plano $z = 5$, que tem como bordo $C = \partial S$.

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

O versor normal, compatível com a orientação anti-horária, é $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$. Por outro lado,

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 2xz & \cos(xyz) \end{vmatrix} = (-xz\sin(xyz) - 2x, yz\sin(xyz) + 2yz, 2z - z^2).$$

Assim, lembrando que em $S$ temos $z = 5$ e que $S$ é um disco de raio $\sqrt{5}$, temos que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -15A(S_1) = -15\pi(\sqrt{5})^2 = -75\pi.$$

# Questão 3

A mudança de variáveis sugerida é $(x,y) = T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$, que é linear; logo a região $D^*$ levada em $D$ sob $T$ é o retângulo de vértices $(1,1), (1,-1), (7,1), (7,-1)$.

Para usar a fórmula de mudança de variáveis, precisamos calcular o determinante da matriz Jacobiana da transformação:

$$\det J(u,v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2.$$

Então:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)\, dxdy &= \iint_{D^*} (x(u,v) + y(u,v))|\det J(u,v)|\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\iint_{D^*} u\, du\, dv == \frac{1}{2}\Big(\int_1^7 u\, du\Big)\Big(\int_{-1}^1 dv\Big) = \frac{u^2}{2}\Big]_1^7 = 24. \end{aligned}$$

# Questão 4

**item(a)**: **FALSO**.

Um campo $\mathbf{F}$ é conservativo em $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Mas para o campo dado,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (bz - cy, cx - az, ay - bz),$$

temos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ bz - cy & cx - az & ay - bz \end{vmatrix} = (2a, 2b, 2c) = 2\mathbf{A} \neq \mathbf{0}.$$

**item(b)**: **VERDADEIRA**.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{f(x-y)}{y} + \dfrac{x\, f'(x-y)}{y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x\, f'(x-y)}{y} - \dfrac{x\, f(x-y)}{y^2} \end{cases}$$

Logo,

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = f(x-y) + xf'(x-y) - xf'(x-y) - \frac{x\, f(x-y)}{y} = \Big(\frac{y-x}{x}\Big) z.$$