MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIIa feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$f'(x) = 2\cos(4x) + \operatorname{sen}(x)$	$P'(x) = b + 2c(x - 32,1) + 3d(x - 32,1)^2$
$f''(x) = -8\operatorname{sen}(4x) + \cos(x)$	$P''(x) = 2c + 6d(x - 32,1)$
$f'''(x) = -32\cos(4x) - \operatorname{sen}(x)$	$P'''(x) = 6d$

Fazendo $f(32,1) = P(32,1)$, $f'(32,1) = P'(32,1)$, $f''(32,1) = P''(32,1)$ e $f'''(32,1) = P'''(32,1)$, temos

$$a = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(128,4) - \cos(32,1);$$

$$b = 2\cos(128,4) + \operatorname{sen}(32,1);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-8\operatorname{sen}(128,4) + \cos(32,1)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(-32\cos(128,4) - \operatorname{sen}(32,1)\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 1/2*sin(4*x) - cos(x);
> a:= 1/2*sin(1284/10) - cos(321/10) ;
> b:= 2*cos(1284/10) + sin(321/10) ;
> c:= 1/2*( -8*sin(1284/10) + cos(321/10) );
> d:= 1/6*( - 32*cos(1284/10) - sin(321/10) );
> P:= x-> a + b*(x-321/10)+ c*(x-321/10)^2 + d*(x-321/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=30..34);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=30..34);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 32,1$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

Questão 2.

Temos $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/2-1)+cos(x/2);
> g:=x->-1/500*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1/2;
```

(a) $-0,4 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,9 \iff -0,1 + f(x) < g(x) < 1,2 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.1, f(x)+1.2, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $-0,1+f(x) < g(x) < 1,2+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.1, f(x)+1.2], x=-50..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.2, x=-50..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.1, x=-50..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-47,794; -47,532)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.1, f(x)+1.2], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.1, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.1, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-1,6555; 4,9627)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,1 - 2 < g(x) < 1,2 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.2);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.1);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,4 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,9$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-47,794; -47,532) \cup (-1,6555; 4,9627)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,7 \leq g(x) - f(x) \leq 0,7$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.7, f(x)+0.7, g(x)],x=-50..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.7, f(x)+0.7], x=-50..-47);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.7, x=-50..-47);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.7, x=-50..-47);
```

Assim, temos $S_1 = [-47,694; -47,409]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.7, f(x)+0.7], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.7, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.7, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-2,7290; 6,2123]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,7 - 2 < g(x) < 0,7 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.7);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.7);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -47,694) \cup (-47,409; -2,7290) \cup (6,2123; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 5\,\cos(x) + x\,\sqrt{x+4} - 7\,.$$

Para que $\sqrt{x+4} \in \mathbb{R}$, precisamos $x + 4 \geq 0$, assim $\mathrm{Dom}(f) = [-4, +\infty)$.

(b) `> f:=x->5*cos(x) + x*sqrt(x+4) -7 ;`

`> r:=x-> D(f)(2.4)*(x-2.4)+f(2.4);`

Com "`> plot([f(x), r(x)], x=-12..6);`" vemos que a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2.4$ passa pelo eixo x em um valor menor que -4, portanto $x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-12..6);`" vemos a menor solução de $f(x) = 0$, pois -4 é o extremo inferior do domínio de f, e vemos que podemos tomar $x_0 = 4$:

```
>x[0]:=4.0; for n from 0 to 4 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 4$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 3,857164592\,, \quad x_2 = 3,851510422 \quad \text{e} \quad x_3 = 3,851500727\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 4$, podemos escolher o termo $x_4 = 3,851500727$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_4 e x_5 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIIb feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}\,(4\,x) - \cos(x)$	$P'(x) = b + 2\,c\,(x-32,1) + 3\,d\,(x-32,1)^2$
$f''(x) = -8\cos(4\,x) + \mathrm{sen}\,(x)$	$P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x-32,1)$
$f'''(x) = 32\,\mathrm{sen}\,(4\,x) + \cos(x)$	$P'''(x) = 6\,d$

Fazendo $f(32,1) = P(32,1)$, $f'(32,1) = P'(32,1)$, $f''(32,1) = P''(32,1)$ e $f'''(32,1) = P'''(32,1)$, temos

$$a = \tfrac{1}{2}\cos(128,4) - \mathrm{sen}\,(32,1);$$

$$b = -2\,\mathrm{sen}\,(128,4) - \cos(32,1);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-8\cos(128,4) + \mathrm{sen}\,(32,1)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(32\,\mathrm{sen}\,(128,4) + \cos(32,1)\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 1/2*cos(4*x) - sin(x);
> a:= 1/2*cos(1284/10) - sin(321/10) ;
> b:= -2*sin(1284/10) - cos(321/10) ;
> c:= 1/2*( -8*cos(1284/10) + sin(321/10) );
> d:= 1/6*( 32*sin(1284/10)+ cos(321/10) );
> P:= x-> a + b*(x-321/10)+ c*(x-321/10)^2 + d*(x-321/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=30..34);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=30..34);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 32,1$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 32,1$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 32,1$.

Questão 2.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/2-1)+cos(x/2);
> g:=x->-1/500*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1/2;
```

(a) $-0,7 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,8 \iff -0,4 + f(x) < g(x) < 1,1 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.4, f(x)+1.1, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $-0,4+f(x) < g(x) < 1,1+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.4, f(x)+1.1], x=-50..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.1, x=-50..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.4, x=-50..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-47,774; -47,471)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.4, f(x)+1.1], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.4, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.4, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,2555; 5,6806)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,4 - 2 < g(x) < 1,1 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.1);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.4);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,7 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,8$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-47,774; -47,471) \cup (-2,2555; 5,6806)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,6 \leq g(x) - f(x) \leq 0,6$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.6, f(x)+0.6, g(x)],x=-50..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-50, 10]$.
Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.6], x=-50..-47);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.6, x=-50..-47);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-50..-47);
```

Assim, temos $S_1 = [-47, 674; -47, 430$.
Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.6], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-2, 5810; 6, 0491]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.
Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,6 - 2 < g(x) < 0,6 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.6);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.6);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -47, 674) \cup (-47, 430; -2, 5810) \cup (6, 0491; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 5\,\cos(x) + x\,\sqrt{x+5} - 7\,.$$

Para que $\sqrt{x+5} \in \mathbb{R}$, precisamos $x + 5 \geq 0$, assim $\mathrm{Dom}(f) = [-5, +\infty)$.

(b) `> f:=x->5*cos(x) + x*sqrt(x+5) -7 ;`

`> r:=x-> D(f)(2.4)*(x-2.4)+f(2.4);`

Com "`> plot([f(x), r(x)], x=-20..5);`" vemos que a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2.4$ passa pelo eixo x em um valor menor que -5, portanto $x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-20..5);`" vemos a menor solução de $f(x) = 0$, pois -5 é o extremo inferior do domínio de f, e vemos que podemos tomar $x_0 = 4$:

```
>x[0]:=4.0; for n from 0 to 7 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 4$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 3,767567243\,, \quad x_2 = 3,751658064 \quad \text{e} \quad x_3 = 3,751572437\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 4$, podemos escolher o termo $x_6 = 3,751572435$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_6 e x_7 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.