MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IVa   feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$$f'(x) = 2\cos(x/2) + 2\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$$

$$f''(x) = -\,\mathrm{sen}\,(x/2) + 4\cos(2\,x)$$

$$f'''(x) = -\tfrac{1}{2}\cos(x/2) - 8\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$$

$$P'(x) = b + 2\,c\,(x - 21,3) + 3\,d\,(x - 21,3)^2$$

$$P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 21,3)$$

$$P'''(x) = 6\,d$$

Fazendo $f(21,3) = P(21,3)$, $f'(21,3) = P'(21,3)$, $f''(21,3) = P''(21,3)$ e $f'''(21,3) = P'''(21,3)$, temos

$$a = 4\,\mathrm{sen}\,(10,65) - \cos(42,6);$$

$$b = 2\cos(10,65) + 2\,\mathrm{sen}\,(42,6);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-\,\mathrm{sen}\,(10,65) + 4\cos(42,6)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\cos(10,65) - 8\,\mathrm{sen}\,(42,6)\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 4*sin(x/2) - cos(2*x) ;
> a:= 4*sin(1065/100) - cos(426/10) ;
> b:= 2*cos(1065/100) + 2*sin(426/10) ;
> c:= 1/2*( -sin(1065/100) + 4*cos(426/10) );
> d:= 1/6*( - 1/2*cos(1065/100) - 8*sin(426/10) );
> P:= x-> a + b*(x-213/10)+ c*(x-213/10)^2 + d*(x-213/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=19..23);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=19..23);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 21,3$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 21,3$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 21,3$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 21,3$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 21,3$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 21,3$.

Questão 2.

Temos $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/2-1)+cos(x/2);
> g:=x->-1/500*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1/2;
```

(a) $-0,4 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,9 \iff -0,1 + f(x) < g(x) < 1,2 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.1, f(x)+1.2, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $-0,1+f(x) < g(x) < 1,2+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.1, f(x)+1.2], x=-50..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.2, x=-50..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.1, x=-50..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-47,794; -47,532)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.1, f(x)+1.2], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.1, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.1, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-1,6555; 4,9627)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,1 - 2 < g(x) < 1,2 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.2);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.1);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,4 < g(x)-f(x)-0,3 < 0,9$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-47,794; -47,532) \cup (-1,6555; 4,9627)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,7 \leq g(x) - f(x) \leq 0,7$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.7, f(x)+0.7, g(x)],x=-50..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.7, f(x)+0.7], x=-50..-47);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.7, x=-50..-47);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.7, x=-50..-47);
```

Assim, temos $S_1 = [-47,694; -47,409]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.7, f(x)+0.7], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.7, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.7, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-2,7290; 6,2123]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,7 - 2 < g(x) < 0,7 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.7);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.7);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -47,694) \cup (-47,409; -2,7290) \cup (6,2123; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = \cos(2\,x) + \sqrt{x-4} - 2\,.$$

Para que $\sqrt{x-4} \in \mathbb{R}$, precisamos $x - 4 \geq 0$, assim $\mathrm{Dom}(f) = [4, +\infty)$.

(b) `> f:=x->cos(2*x) + sqrt(x-4) -2 ;`

`> r:=x-> D(f)(6.32)*(x-6.32)+f(6.32);`

Com "`> plot([f(x), r(x)], x=2..10);`" vemos que a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 6,32$ passa pelo eixo x em um valor menor que 4, portanto $x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=2..10);`" vemos a menor solução de $f(x) = 0$, pois 4 é o extremo inferior do domínio de f, e vemos que podemos tomar $x_0 = 6$:

```
>x[0]:=6.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 6$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 5,819115679\,, \quad x_2 = 5,845452732 \quad \text{e} \quad x_3 = 5,845918038\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 6$, podemos escolher o termo $x_8 = 5,845918190$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_8 e x_9 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IVb feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}\,(x/2) - 2\cos(2\,x)$	$P'(x) = b + 2\,c\,(x - 21,3) + 3\,d\,(x - 21,3)^2$
$f''(x) = -\cos(x/2) + 4\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$	$P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 21,3)$
$f'''(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(x/2) + 8\cos(2\,x)$	$P'''(x) = 6\,d$

Fazendo $f(21,3) = P(21,3)$, $f'(21,3) = P'(21,3)$, $f''(21,3) = P''(21,3)$ e $f'''(21,3) = P'''(21,3)$, temos

$$a = 4\cos(10,65) - \mathrm{sen}\,(42,6);$$

$$b = -2\,\mathrm{sen}\,(10,65) - 2\cos(42,6);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-\cos(10,65) + 4\,\mathrm{sen}\,(42,6)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(10,65) + 8\cos(42,6)\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 4*sin(x/2) - cos(2*x) ;
> a:= 4*cos(1065/100) - sin(426/10) ;
> b:= -2*sin(1065/100) - 2*cos(426/10) ;
> c:= 1/2*( -cos(1065/100) + 4*sin(426/10) );
> d:= 1/6*( 1/2*sin(1065/100) + 8*cos(426/10) );
> P:= x-> a + b*(x-213/10)+ c*(x-213/10)^2 + d*(x-213/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=19..23);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=19..23);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 21,3$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 21,3$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 21,3$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 21,3$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 21,3$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 21,3$.

Questão 2.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/2-1)+cos(x/2);
> g:=x->-1/500*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1/2;
```

(a) $-0,7 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,8 \iff -0,4 + f(x) < g(x) < 1,1 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.4, f(x)+1.1, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $-0,4+f(x) < g(x) < 1,1+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.4, f(x)+1.1], x=-50..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.1, x=-50..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.4, x=-50..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-47,774; -47,471)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.4, f(x)+1.1], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.4, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.4, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,2555; 5,6806)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,4-2 < g(x) < 1,1+2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.1);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.4);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,7 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,8$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-47,774; -47,471) \cup (-2,2555; 5,6806)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-0,6 \leq g(x) - f(x) \leq 0,6$.

Pelo comando "`plot([f(x)-0.6, f(x)+0.6, g(x)],x=-50..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.6], x=-50..-47);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.6, x=-50..-47);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-50..-47);
```

Assim, temos $S_1 = [-47,674; -47,430]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-0.6, f(x)+0.6], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-0.6, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-2,5810; 6,0491]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-0,6 - 2 < g(x) < 0,6 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+0.6);`"e "`>solve(g(x)>-2-0.6);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -47,674) \cup (-47,430; -2,5810) \cup (6,0491; +\infty) .$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = \cos(2\,x) + \sqrt{x-2} - \frac{5}{2}\,.$$

Para que $\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$, precisamos $x - 2 \geq 0$, assim $\mathrm{Dom}(f) = [2, +\infty)$.

(b) `> f:=x->cos(2*x) + sqrt(x-2) -5/2 ;`

```
> r:=x-> D(f)(6.32)*(x-6.32)+f(6.32);
```

Com "`> plot([f(x), r(x)], x=-1..10);`" vemos que a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 6,32$ passa pelo eixo x em um valor menor que 2, portanto $x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-1..10);`" vemos a menor solução de $f(x) = 0$, pois 2 é o extremo inferior do domínio de f, e vemos que podemos tomar $x_0 = 6$:

```
>x[0]:=6.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 6$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 5,740123916\,, \quad x_2 = 5,789498132 \quad \text{e} \quad x_3 = 5,790772054\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 6$, podemos escolher o termo $x_8 = 5,790772996$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_8 e x_9 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.