MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Va feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$f'(x) = \cos(x) + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(x/3)$	$P'(x) = b + 2\,c\,(x - 31,3) + 3\,d\,(x - 31,3)^2$
$f''(x) = -\,\text{sen}\,(x) + \frac{1}{9}\cos(x/3)$	$P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 31,3)$
$f'''(x) = -\cos(x) - \frac{1}{27}\,\text{sen}\,(x/3)$	$P'''(x) = 6\,d$

Fazendo $f(31,3) = P(31,3)$, $f'(31,3) = P'(31,3)$, $f''(31,3) = P''(31,3)$ e $f'''(31,3) = P'''(31,3)$, temos

$$a = \text{sen}\,(31,3) - \cos(31,3/3) + \cos(\sqrt{2});$$

$$b = \cos(31,3) + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,(31,3/3);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-\,\text{sen}\,(31,3) + \tfrac{1}{9}\cos(31,3/3)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(-\cos(31,3) - \tfrac{1}{27}\,\text{sen}\,(31,3/3)\right).$$

(b)
```
> f:= x-> sin(x) - cos(x/3) + cos(sqrt(2));
> a:= sin(313/10) - cos(313/30) + cos(sqrt(2)) ;
> b:= cos(313/10) + 1/3*sin(313/30) ;
> c:= 1/2*( -sin(313/10) + 1/9*cos(313/30) );
> d:= 1/6*( - cos(313/10) - 1/27*sin(313/30) );
> P:= x-> a + b*(x-313/10)+ c*(x-313/10)^2 + d*(x-313/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=29..33);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=29..33);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 31,3$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 31,3$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 31,3$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 31,3$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 31,3$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 31,3$.

Questão 2.

Temos $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/2-1)+cos(x/2);
> g:=x->-1/500*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1;
```

(a) $-0,2 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,9 \iff 0,1 + f(x) < g(x) < 1,2 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)+0.1, f(x)+1.2, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $0,1+f(x) < g(x) < 1,2+f(x)$ possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)+0.1, f(x)+1.2], x=-50..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.2, x=-50..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)+0.1, x=-50..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-47,694; -47,471)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)+0.1, f(x)+1.2], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.2, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)+0.2, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,2555; 5,6806)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $0,1 - 2 < g(x) < 1,2 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.2);`"e "`>solve(g(x)>-2+0.1);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,2 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,9$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-47,694; -47,471) \cup (-2,2555; 5,6806)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-1,1 \leq g(x) - f(x) \leq 1,1$.

Pelo comando "`plot([f(x)-1.1 , f(x)+1.1 , g(x)],x=-50..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-1.1 , f(x)+1.1 ], x=-50..-47);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.1, x=-50..-47);
>fsolve(g(x)=f(x)-1.1, x=-50..-47);
```

Assim, temos $S_1 = [-47,674; -47,221]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-1.1, f(x)+1.1], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-1.1, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-1.1, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-3,8008; 7,3252]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-1,1 - 2 < g(x) < 1,1 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.1);`"e "`>solve(g(x)>-2-1.1);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -47,674) \cup (-47,221; -3,8008) \cup (7,3252; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 5\,\cos(x) + x\,\sqrt{x+4} - 7\,.$$

Para que $\sqrt{x+4} \in \mathbb{R}$, precisamos $x + 4 \geq 0$, assim $\mathrm{Dom}(f) = [-4, +\infty)$.

(b) `> f:=x->5*cos(x) + x*sqrt(x+4) -7 ;`

`> r:=x-> D(f)(2.4)*(x-2.4)+f(2.4);`

Com "`> plot([f(x), r(x)], x=-12..6);`" vemos que a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2.4$ passa pelo eixo x em um valor menor que -4, portanto $x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-12..6);`" vemos a menor solução de $f(x) = 0$, pois -4 é o extremo inferior do domínio de f, e vemos que podemos tomar $x_0 = 4$:

```
>x[0]:=4.0; for n from 0 to 4 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 4$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 3,857164592\,, \quad x_2 = 3,851510422 \quad \text{e} \quad x_3 = 3,851500727\ .$$

(c.3) Com $x_0 = 4$, podemos escolher o termo $x_4 = 3,851500727$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_4 e x_5 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Vb   feita em 3 dezembro de 2012

Questão 1.

(a) Derivadas f e P necessárias:

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\cos(x/3)$	$P'(x) = b + 2\,c\,(x - 31,3) + 3\,d\,(x - 31,3)^2$
$f''(x) = -\cos(x) + \frac{1}{9}\operatorname{sen}(x/3)$	$P''(x) = 2\,c + 6\,d\,(x - 31,3)$
$f'''(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{27}\cos(x/3)$	$P'''(x) = 6\,d$

Fazendo $f(31,3) = P(31,3)$, $f'(31,3) = P'(31,3)$, $f''(31,3) = P''(31,3)$ e $f'''(31,3) = P'''(31,3)$, temos

$$a = \cos(31,3) - \operatorname{sen}(31,3/3) + \cos(\sqrt{2});$$

$$b = -\operatorname{sen}(31,3) - \tfrac{1}{3}\cos(31,3/3);$$

$$c = \tfrac{1}{2}\left(-\cos(31,3) + \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}(31,3/3)\right);$$

$$d = \tfrac{1}{6}\left(\operatorname{sen}(31,3) + \tfrac{1}{27}\operatorname{sen}(31,3/3)\right).$$

(b)

```
> f:= x-> cos(x) - sin(x/3) + cos(sqrt(2));
> a:= cos(313/10) - sin(313/30) + cos(sqrt(2)) ;
> b:= -sin(313/10) - 1/3*cos(313/30) ;
> c:= 1/2*( -cos(313/10) + 1/9*sin(313/30) );
> d:= 1/6*( sin(313/10) + 1/27*sin(313/30) );
> P:= x-> a + b*(x-313/10)+ c*(x-313/10)^2 + d*(x-313/10)^3 ;
> plot([f(x),P(x)], x=29..33);
> plot([D(D(f))(x),D(D(P))(x)], x=29..33);
```

Sim. f e P são aparentemente tangentes em $x = 31,3$, e f'' e P'' são aparentemente tangentes em $x = 31,3$.

OU

Não. f e P são aparentemente tangentes em $x = 31,3$, mas f'' e P'' não são tangentes em $x = 31,3$.

OU

Não. f e P não são tangentes em $x = 31,3$ e f'' e P'' não são tangentes em $x = 31,3$.

Questão 2.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

```
> Digits:=5;
> f:=x->sin(x/2-1)+cos(x/2);
> g:=x->-1/500*x^3-13/150*x^2+2/5*x+1;
```

(a) $-0,1 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,8 \iff 0,2 + f(x) < g(x) < 1,1 + f(x)$.

Pelo comando "`plot([f(x)+0.2, f(x)+1.1, g(x)],x=-40..10);`" é possível afirmar que $0,2 + f(x) < g(x) < 1,1 + f(x)$ possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)+0.2, f(x)+1.1], x=-50..-37);`" vemos um intervalo solução, digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.1, x=-50..-37);
>fsolve(g(x)=f(x)+0.2, x=-50..-37);
```

Assim, temos $S_1 = (-47,674; -47,491)$.

Com "`>plot([g(x), f(x)+0.2, f(x)+1.1], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução, digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+0.2, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)+0.2, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = (-2,0739; 5,4688)$.

(ii) Garantindo que não há soluções fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $0,2 - 2 < g(x) < 1,1 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.1);`"e "`>solve(g(x)>-2+0.2);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

Desta forma, temos que o conjunto das soluções de $-0,1 < g(x) - f(x) - 0,3 < 0,8$ é

$$S_1 \cup S_2 = (-47,674; -47,491) \cup (-2,0739; 5,4688)$$

(b) Primeiro determinamos as soluções de (*) $-1,2 \leq g(x) - f(x) \leq 1,2$.

Pelo comando "`plot([f(x)-1.2 , f(x)+1.2 , g(x)],x=-50..10);`" é possível afirmar que (*) possui soluções no intervalo $[-50, 10]$. Diante disso, temos dois trabalhos a fazer: (i) determinar as soluções de (*) em $[-50, 10]$; e (ii) garantir que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

(i) Determinando as soluções de (*) em $[-50, 10]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-1.2 , f(x)+1.2 ], x=-50..-47);`" vemos um intervalo solução de (*) , digamos S_1.

```
>fsolve(g(x)=f(x)+1.2, x=-50..-47);
>fsolve(g(x)=f(x)-1.2, x=-50..-47);
```

Assim, temos $S_1 = [-47,694; -47,199]$.

Com "`>plot([g(x), f(x)-1.2, f(x)+1.2], x=-10..10);`" vemos o outro intervalo solução de (*), digamos S_2.

```
>fsolve(g(x)=f(x)-1.2, x=-10..0);
>fsolve(g(x)=f(x)-1.2, x=0..10);
```

Assim, temos $S_2 = [-3,9010; 7,4237]$.

(ii) Garantindo que não há soluções de (*) fora do intervalo $[-50, 10]$.

Como, $-2 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x$; precisamos que x satisfaça $-1,2 - 2 < g(x) < 1,2 + 2$. No Maple, analisando a interseção das soluções de "`>solve(g(x)<2+1.2);`"e "`>solve(g(x)>-2-1.2);`" ; vemos que não há soluções nos intervalos $(-\infty, -50)$ e $(10, \infty)$.

O conjunto das soluções de (*) é $S_1 \cup S_2$. Desta forma temos:

Resposta:

$$x \notin S_1 \cup S_2$$

ou seja

$$x \in (-\infty; -47,694) \cup (-47,199; -3,9010) \cup (7,4237; +\infty)\,.$$

Questão 3.

(a) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 5\,\cos(x) + x\,\sqrt{x+5} - 7\,.$$

Para que $\sqrt{x+5} \in \mathbb{R}$, precisamos $x + 5 \geq 0$, assim $\mathrm{Dom}(f) = [-5, +\infty)$.

(b) `> f:=x->5*cos(x) + x*sqrt(x+5) -7 ;`

```
> r:=x-> D(f)(2.4)*(x-2.4)+f(2.4);
```

Com "`> plot([f(x), r(x)], x=-20..5);`" vemos que a reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2.4$ passa pelo eixo x em um valor menor que -5, portanto $x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)$ e não podemos construir a sequência de aproximações de α pelo Método de Newton.

(c.1) Com "`>plot(f(x), x=-20..5);`" vemos a menor solução de $f(x) = 0$, pois -5 é o extremo inferior do domínio de f, e vemos que podemos tomar $x_0 = 4$:

```
>x[0]:=4.0; for n from 0 to 7 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]); end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 4$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 3,767567243\,,\;\; x_2 = 3,751658064 \;\text{ e }\; x_3 = 3,751572437\;.$$

(c.3) Com $x_0 = 4$, podemos escolher o termo $x_6 = 3,751572435$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_6 e x_7 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.