MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – Ia   em 8 abril de 2013

Questão 1.

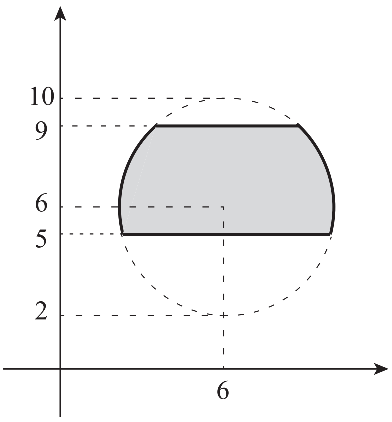
Como f tem um intervalo de decrescimento seguido de um intervalo de crescimento, o gráfico de f é uma semicircunferência inferior de raio $r = 5 - (-3) = 13 - 5 = 8$ e a primeira coordenada do centro é $x_c = 5$. Como $f(5) = \sqrt{2}$, o valor mínimo de f é $\sqrt{2}$ e $\mathrm{Im}(f) = [\sqrt{2}, \sqrt{2} + \text{raio}] = [\sqrt{2}, \sqrt{2}+8]$. Logo a segunda coordenada do centro é $y_c = \sqrt{2}+8$.

Equação da circunferência: $(x-5)^2 + (y - (\sqrt{2}+8))^2 = 8^2$.

Expressão de f: $f(x) = \sqrt{2} + 8 - \sqrt{8^2 - (x-5)^2}$.

Questão 2.

(a)



(b) (x, y) deve ser tal que $y = 5$ e $(x-6)^2 + (5-6)^2 = 4^2$.

Fazendo "`> solve((x-6)^2 + (5-6)^2 = 4^2);`", temos

$$Q_1 = (6 - \sqrt{15},\, 5) \quad \text{e} \quad Q_2 = (6 + \sqrt{15},\, 5).$$

Questão 3.

(a) De (ii) temos que $u = a + 3$. E com (i): $\dfrac{3}{4} = \dfrac{f(u) - f(a)}{u - a} = \dfrac{f(a+3) - f(a)}{3}$.

Com "`> f:=x->x*(x-5);`" e "`> solve((f(a+3)-f(a))/3=3/4);`", temos

$$a = \frac{11}{8} \quad \text{e} \quad u = \frac{11}{8} + 3 = \frac{35}{8}.$$

Fazendo "`> f(11/8);`" e "`> f(35/8);`", vemos que

$$b = f(a) = -\frac{319}{64} \quad \text{e} \quad v = f(u) = -\frac{175}{64}.$$

(b) Equação da reta: $y = \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{11}{8}\right) - \dfrac{319}{64} = \dfrac{3}{4}\,x - \dfrac{385}{64}.$

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{h(r)}{r} = \dfrac{5}{r-2}$, logo

$$h(r) = \frac{5\,r}{r-2}.$$

(b) Domínio: $r > 2 =$ raio do cilindro, assim $r - 2 > 0$. Precisamos que $2\,r < 24$, logo $r < 12$, além disso $h(r) = \frac{5\,r}{r-2} < 18$, como $r - 2 > 0$, temos $5\,r < 18(r-2)$, daí $r > 36/13$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{36}{13}, 12\right).$$

Temos $(f(r))^2 = r^2 + (h(r))^2$. Logo

$$f(r) = \sqrt{r^2 + \left(\frac{5\,r}{r-2}\right)^2}.$$

(c) `> f:=r->sqrt(r^2 + ((5*r)/(r-2))^2);`

Com “ `>plot(f(r), r=36/13..12);` ” vemos onde f tem mínimo global.

Escolhendo $r = 5,68403$ em “`>plot(f(r), r=5.67..5.695);` ” temos

erro $< 5,695 - 5,67 = 0,025 < 0,03$.

Resposta: $r = 5,68403$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – Ib   em 8 abril de 2013

Questão 1.

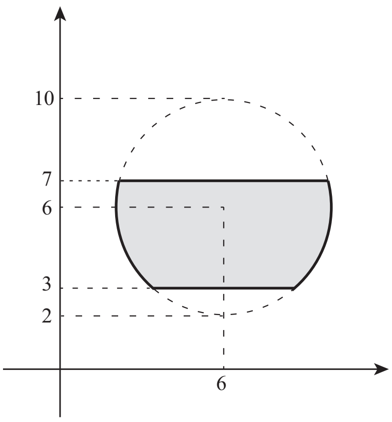
Como f tem um intervalo de decrescimento seguido de um intervalo de crescimento, o gráfico de f é uma semicircunferência inferior de raio $r = 3 - (-5) = 11 - 3 = 8$ e a primeira coordenada do centro é $x_c = 3$. Como $f(3) = \sqrt{5}$, o valor mínimo de f é $\sqrt{5}$ e $\mathrm{Im}(f) = [\sqrt{5}, \sqrt{5} + \text{raio}] = [\sqrt{5}, \sqrt{5}+8]$. Logo a segunda coordenada do centro é $y_c = \sqrt{5}+8$.

Equação da circunferência: $(x-3)^2 + (y - (\sqrt{5}+8))^2 = 8^2$.

Expressão de f: $f(x) = \sqrt{5} + 8 - \sqrt{8^2 - (x-3)^2}$.

Questão 2.

(a)



(b) (x, y) deve ser tal que $y = 3$ e $(x-6)^2 + (3-6)^2 = 4^2$.

Fazendo "`> solve((x-6)^2 + (3-6)^2 = 4^2);`", temos

$$Q_1 = (6 - \sqrt{7}, 3) \quad \text{e} \quad Q_2 = (6 + \sqrt{7}, 3).$$

Questão 3.

De (ii) temos que $u = a + 3$. E com (i): $\dfrac{3}{5} = \dfrac{f(u) - f(a)}{u - a} = \dfrac{f(a+3) - f(a)}{3}$.

Com "`> f:=x->x*(x-5);`" e "`> solve((f(a+3)-f(a))/3=3/5);`", temos

$$a = \frac{13}{10} \quad \text{e} \quad u = \frac{13}{10} + 3 = \frac{43}{10}.$$

Fazendo "`> f(13/10);`" e "`> f(43/10);`", vemos que

$$b = f(a) = -\frac{481}{100} \quad \text{e} \quad v = f(u) = -\frac{301}{100}.$$

(b) Equação da reta: $y = \dfrac{3}{5}\left(x - \dfrac{13}{10}\right) - \dfrac{481}{100} = \dfrac{3}{5}\,x - \dfrac{559}{100}$.

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{h(r)}{r} = \dfrac{7}{r-3}$, logo

$$h(r) = \frac{7\,r}{r-3}.$$

(b) Domínio: $r > 3 =$ raio do cilindro, assim $r - 3 > 0$. Precisamos que $2\,r < 24$, logo $r < 12$, além disso $h(r) = \frac{7\,r}{r-3} < 20$, como $r - 3 > 0$, temos $7\,r < 20(r-3)$, daí $r > 60/13$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{60}{13}, 12\right).$$

Temos $(f(r))^2 = r^2 + (h(r))^2$. Logo

$$f(r) = \sqrt{r^2 + \left(\frac{7\,r}{r-3}\right)^2}.$$

(c) `> f:=r->sqrt(r^2 + ((7*r)/(r-3))^2);`

Com " `>plot(f(r), r=60/13..12);` " vemos onde f tem mínimo global.

Escolhendo $r = 8,277632$ em "`>plot(f(r), r=8.265..8.29);`" temos

erro $< 8,29 - 8,265 = 0,025 < 0,03$.

Resposta: $r = 8,277632$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IIa em 8 abril de 2013

Questão 1.

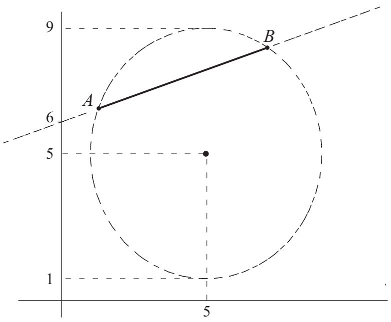
Como f tem um intervalo de decrescimento seguido de um intervalo de crescimento, o gráfico de f é uma semicircunferência inferior de raio $r = 5 - (-2) = 12 - 5 = 7$ e a primeira coordenada do centro é $x_c = 5$. Como $f(5) = \sqrt{2}$, o valor mínimo de f é $\sqrt{2}$ e $\text{Im}(f) = [\sqrt{2}, \sqrt{2} + \text{raio}] = [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 7]$. Logo a segunda coordenada do centro é $y_c = \sqrt{2} + 7$.

Equação da circunferência: $(x-5)^2 + (y - (\sqrt{2}+7))^2 = 7^2$.

Expressão de f: $f(x) = \sqrt{2} + 7 - \sqrt{7^2 - (x-5)^2}$.

Questão 2.

(a)



(b) (x, y) deve ser tal que $y = x/3 + 6$ e $(x-5)^2 + (x/3 + 6 - 5)^2 = 4^2$.

Fazendo "`> solve((x-5)^2 + (x/3+6-5)^2 = 4^2);`", temos

$$A = \left(\frac{21}{5} - \frac{6\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{3}\left(\frac{21}{5} - \frac{6\sqrt{6}}{5}\right) + 6\right) \quad \text{e} \quad B = \left(\frac{21}{5} + \frac{6\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{3}\left(\frac{21}{5} + \frac{6\sqrt{6}}{5}\right) + 6\right).$$

Questão 3.

(a) De (ii) temos que $u = a + 3$. E com (i): $-\dfrac{3}{4} = \dfrac{f(u) - f(a)}{u - a} = \dfrac{f(a+3) - f(a)}{3}$.

Com "`> f:=x->x*(x-5);`" e "`> solve((f(a+3)-f(a))/3=-3/4);`", temos

$$a = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad u = \frac{5}{8} + 3 = \frac{29}{8}.$$

Fazendo "`> f(5/8);`" e "`> f(29/8);`", vemos que

$$b = f(a) = -\frac{175}{64} \quad \text{e} \quad v = f(u) = -\frac{319}{64}.$$

(b) Equação da reta: $y = -\dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{5}{8}\right) - \dfrac{175}{64} = -\dfrac{3}{4}\,x - \dfrac{145}{64}.$

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{h(r)}{r} = \dfrac{8}{r-5}$, logo

$$h(r) = \frac{8\,r}{r-5}.$$

(b) Domínio: $r > 5 =$ raio do cilindro, assim $r - 5 > 0$. Precisamos que $2\,r < 30$, logo $r < 15$, além disso $h(r) = \frac{8\,r}{r-5} < 22$, como $r - 5 > 0$, temos $8\,r < 22(r-5)$, daí $r > 55/7$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{55}{7}, 15\right).$$

Temos $(f(r))^2 = r^2 + (h(r))^2$. Logo

$$f(r) = \sqrt{r^2 + \left(\frac{8\,r}{r-5}\right)^2}.$$

(c) `> f:=r->sqrt(r^2 + ((8*r)/(r-5))^2);`

Com “ `>plot(f(r), r=55/7..15);` ” vemos onde f tem mínimo global.

Escolhendo $r = 11,8399$ em “`>plot(f(r), r=11.82..11.86);` ” temos

erro $< 11,86 - 11,82 = 0,04 < 0,05$.

Resposta: $r = 11,8399$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IIb   em 8 abril de 2013

Questão 1.

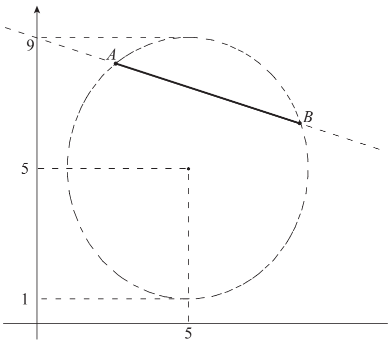
Como f tem um intervalo de decrescimento seguido de um intervalo de crescimento, o gráfico de f é uma semicircunferência inferior de raio $r = 5 - (-2) = 12 - 5 = 7$ e a primeira coordenada do centro é $x_c = 5$. Como $f(5) = \sqrt{5}$, o valor mínimo de f é $\sqrt{5}$ e $\mathrm{Im}(f) = [\sqrt{5}, \sqrt{2} + \text{raio}] = [\sqrt{5}, \sqrt{5} + 7]$. Logo a segunda coordenada do centro é $y_c = \sqrt{5} + 7$.

Equação da circunferência: $(x-5)^2 + (y - (\sqrt{5}+7))^2 = 7^2$.

Expressão de f: $f(x) = \sqrt{5} + 7 - \sqrt{7^2 - (x-5)^2}$.

Questão 2.

(a)



(b) (x, y) deve ser tal que $y = -x/4 + 9$ e $(x-5)^2 + (-x/4 + 9 - 5)^2 = 4^2$.

Fazendo "`> solve((x-5)^2 + (-x/4+9-5)^2 = 4^2);`", temos

$$A = \left(\frac{96}{17} - \frac{4\sqrt{151}}{17}, -\frac{1}{4}\left(\frac{96}{17} - \frac{4\sqrt{151}}{17}\right) + 9\right) \text{ e } B = \left(\frac{96}{17} + \frac{4\sqrt{151}}{17}, -\frac{1}{4}\left(\frac{96}{17} + \frac{4\sqrt{151}}{17}\right) + 9\right).$$

Questão 3.

(a) De (ii) temos que $u = a + 3$. E com (i): $\quad -\dfrac{3}{5} = \dfrac{f(u) - f(a)}{u - a} = \dfrac{f(a+3) - f(a)}{3}$.

Com "`> f:=x->x*(x-5);`" e "`> solve((f(a+3)-f(a))/3=-3/5);`", temos

$$a = \frac{7}{10} \quad \text{e} \quad u = \frac{7}{10} + 3 = \frac{37}{10}.$$

Fazendo "`> f(7/10);`" e "`> f(37/10);`", vemos que

$$b = f(a) = -\frac{301}{100} \quad \text{e} \quad v = f(u) = -\frac{481}{100}.$$

(b) Equação da reta: $y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{7}{10}\right) - \frac{301}{100} = -\frac{3}{5}\,x - \frac{259}{100}$.

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{h(r)}{r} = \dfrac{7}{r-5}$, logo

$$h(r) = \frac{7\,r}{r-4}.$$

(b) Domínio: $r > 4 =$ raio do cilindro, assim $r - 4 > 0$. Precisamos que $2\,r < 28$, logo $r < 14$, além disso $h(r) = \frac{7\,r}{r-4} < 20$, como $r - 4 > 0$, temos $7\,r < 20(r-4)$, daí $r > 80/13$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{80}{13}, 14\right).$$

Temos $(f(r))^2 = r^2 + (h(r))^2$. Logo

$$f(r) = \sqrt{r^2 + \left(\frac{7\,r}{r-4}\right)^2}.$$

(c) `> f:=r->sqrt(r^2 + ((8*r)/(r-5))^2);`

Com " `>plot(f(r), r=80/13..14);` " vemos onde f tem mínimo global.

Escolhendo $r = 9,8087$ em "`>plot(f(r), r=9.79..9.83);`" temos

erro $< 9,83 - 9,79 = 0,04 < 0,05$.

Resposta: $r = 9,8087$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IIIa em 8 abril de 2013

Questão 1.

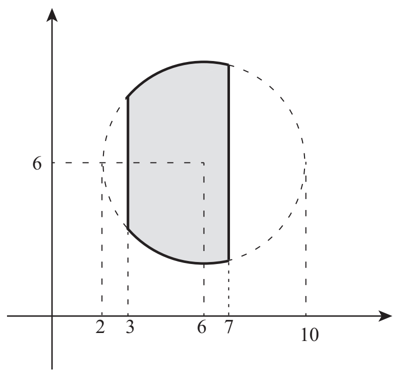
Como f tem máximo em dois valores, o gráfico de f é uma semicircunferência inferior. O diâmetro da circunferência é $12-(-1)=13$, o raio é $\frac{13}{2}$ e a primeira coordenada do centro é $x_c=\frac{12+(-1)}{2}=\frac{11}{2}$. Como o valor mínimo de f é $\sqrt{15}$, $f\left(\frac{11}{2}\right)=\sqrt{15}$, o valor máximo de f é $\sqrt{15}$+raio $=\sqrt{15}+\frac{13}{2}$. Logo a segunda coordenada do centro é $y_c=\sqrt{15}+\frac{13}{2}$.

Equação da circunferência: $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\left(\sqrt{15}+\frac{13}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2$.

Expressão de f: $f(x)=\sqrt{15}+\frac{13}{2}-\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(x-\frac{11}{2}\right)^2}$.

Questão 2.

(a)



(b) (x,y) deve ser tal que $x=7$ e $(7-6)^2+(y-6)^2=4^2$.

Fazendo "`> solve((7-6)^2 + (y-6)^2 = 4^2);`", temos

$$Q_1=(7,\,6-\sqrt{15})\quad \text{e} \quad Q_2=(7,\,6+\sqrt{15}).$$

Questão 3.

(a) De (ii) temos que $u=a+3$. E com (i): $-\dfrac{3}{4}=\dfrac{f(u)-f(a)}{u-a}=\dfrac{f(a+3)-f(a)}{3}$.

Com "`> f:=x->-x*(x-5);`" e "`> solve((f(a+3)-f(a))/3=-3/4);`", temos

$$a=\frac{11}{8} \quad \text{e} \quad u=\frac{11}{8}+3=\frac{35}{8}.$$

Fazendo "`> f(11/8);`" e "`> f(35/8);`", vemos que

$$b=f(a)=\frac{319}{64} \quad \text{e} \quad v=f(u)=\frac{175}{64}.$$

(b) Equação da reta: $y = -\dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{11}{8}\right) + \dfrac{319}{64} = -\dfrac{3}{4}\,x + \dfrac{385}{64}$.

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{y_A(x)}{x} = \dfrac{11}{x-7}$, logo

$$y_A(x) = \frac{11\,x}{x-7}.$$

(b) Domínio: $x > 7 =$, pois B está à direita de $(7,0)$, assim $x - 7 > 0$. Precisamos que $x < 40$, além disso $y_A(x) = \frac{11\,x}{x-7} < 40$, como $x-7 > 0$, temos $11\,x < 40(x-7)$, daí $x > 280/29$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{280}{29}, 40\right).$$

Temos $(f(x))^2 = x^2 + (y_A(x))^2$. Logo

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{11\,x}{x-7}\right)^2}.$$

(c) `> f:=x->sqrt(x^2 + ((11*x)/(x-7))^2);`

Com " `>plot(f(x), x=280/29..40);` " vemos onde f tem mínimo global.

Escolhendo $x = 16,4615$ em "`>plot(f(x), x=16.43..16.49);` " temos

erro $< 16,49 - 16,43 = 0,06 < 0,07$.

Resposta: $x = 16,4615$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IIIb em 8 abril de 2013

Questão 1.

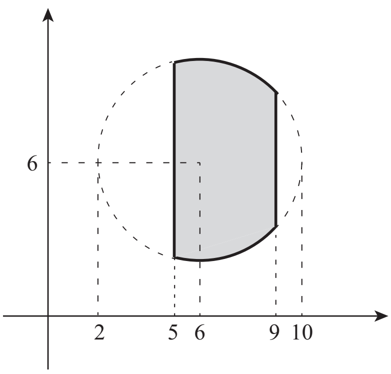
Como f tem máximo em dois valores, o gráfico de f é uma semicircunferência inferior. O diâmetro da circunferência é $12-(-1)=13$, o raio é $\frac{13}{2}$ e a primeira coordenada do centro é $x_c = \frac{12+(-1)}{2} = \frac{11}{2}$. Como o valor mínimo de f é $\sqrt{17}$, $f\left(\frac{11}{2}\right) = \sqrt{17}$, o valor máximo de f é $\sqrt{17}$+raio $= \sqrt{17}+\frac{13}{2}$. Logo a segunda coordenada do centro é $y_c = \sqrt{17}+\frac{13}{2}$.

Equação da circunferência: $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(y-\left(\sqrt{17}+\frac{13}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$.

Expressão de f: $f(x) = \sqrt{17}+\frac{13}{2} - \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{11}{2}\right)^2}$.

Questão 2.

(a)



(b) (x,y) deve ser tal que $x=9$ e $(9-6)^2+(y-6)^2=4^2$.

Fazendo "`> solve((9-6)^2 + (y-6)^2 = 4^2);`", temos

$$Q_1 = (9,\, 6-\sqrt{7}) \quad \text{e} \quad Q_2 = (9,\, 6+\sqrt{7}).$$

Questão 3.

(a) De (ii) temos que $u=a+3$. E com (i): $\quad -\dfrac{3}{5} = \dfrac{f(u)-f(a)}{u-a} = \dfrac{f(a+3)-f(a)}{3}$.

Com "`> f:=x->-x*(x-5);`" e "`> solve((f(a+3)-f(a))/3=-3/5);`", temos

$$a = \frac{13}{10} \quad \text{e} \quad u = \frac{13}{10}+3 = \frac{43}{10}.$$

Fazendo "`> f(13/10);`" e "`> f(43/10);`", vemos que

$$b = f(a) = \frac{481}{100} \quad \text{e} \quad v = f(u) = \frac{301}{100}.$$

(b) Equação da reta: $y = -\dfrac{3}{5}\left(x - \dfrac{13}{10}\right) + \dfrac{481}{100} = -\dfrac{3}{5}\,x + \dfrac{559}{100}$.

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{y_A(x)}{x} = \dfrac{11}{x-6}$, logo

$$y_A(x) = \frac{11\,x}{x-6}.$$

(b) Domínio: $x > 6 =$, pois B está à direita de $(6,0)$, assim $x - 6 > 0$. Precisamos que $x < 30$, além disso $y_A(x) = \frac{11\,x}{x-6} < 30$, como $x-6 > 0$, temos $11\,x < 30(x-6)$, daí $x > 180/19$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{180}{19}, 30\right).$$

Temos $(f(x))^2 = x^2 + (y_A(x))^2$. Logo

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{11\,x}{x-6}\right)^2}.$$

(c) `> f:=x->sqrt(x^2 + ((11*x)/(x-6))^2);`

Com “ `>plot(f(x), x=180/19..30);` ” vemos onde f tem mínimo global.

Escolhendo $x = 14,98763$ em “`>plot(f(x), x=14.96..15.02);` ” temos

erro $< 15,02 - 14,96 = 0,06 < 0,07$.

Resposta: $x = 14,98763$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IVa em 8 abril de 2013

Questão 1.

Pela propriedade (ii), a primeira coordenada do vértice da parábola é $x_v = 9$. Pela propriedade (iii), a segunda coordenada do vértice da parábola é $y_v = 9$. Existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, tal que $f(x) = \mu\,(x-9)^2 + 9$. Por (iv), $0 = \mu\,(0-9)^2 + 9$, daí $\mu = -\frac{1}{9}$ e

Expressão de f: $f(x) = -\dfrac{1}{9}\,(x-9)^2 + 9.$

Questão 2.

(a) y deve ser tal que $(2,7-3)^2 - 9 \leq y \leq -(2,7-3)^2 + 4$, ou seja $0,09 - 9 \leq y \leq -0,09 + 4$.

Resposta: $y \in [-8,91; 3,91]$

(b) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = (x-3)^2 - 9$ e $g(x) = -(x-3)^2 + 4$, com isso temos que decidir se vale $f(0,4505) \leq -2,5001 \leq g(0,4505)$.

```
> f:=x->(x-3)^2-9;
> g:=x->-(x-3)^2+4;
> f(0.4505);
> g(0.4505);
```

Com as contas feitas no maple, vemos que $-2,5001 < f(0,4505) < g(0,4505)$ e que o ponto $(0,4505; -2,5001)$ não pertence à região $\mathcal{R}$.

Questão 3.

(a) `> f:=x->x*(x-5);   > f(3); f(1/3); f(1/2);`

A taxa média de variação de f em $[1/3, 3]$ é

$$\frac{f(3) - f(1/3)}{3 - 1/3} = \frac{-6 - (-14/9)}{8/3} = \frac{-40/9}{8/3} = -\frac{5}{3},$$

e queremos que

$$\frac{f(u) - f(1/2)}{u - 1/2} = -\frac{5}{3}.$$

Usando o maple para a conta: `> solve((f(u)-f(1/2))/(u-1/2)=-5/3);`

temos $u = \dfrac{17}{6}.$

(b) A inclinação da reta é a taxa média de variação de f em $[1/2, u] = [1/2, 17/6]$. Equação da reta: $y - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, ou seja,

$$y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}.$$

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{8-h(r)}{r} = \dfrac{8}{\sqrt{47}/2}$, logo

$$h(r) = 8 - \frac{16\,r}{\sqrt{47}}.$$

(b) Domínio: $r > 0$, pois r é o raio do cone menor, além disso $2\,r <$ diâmetro do cone maior $= \sqrt{47}$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(V) = \left(0, \frac{\sqrt{47}}{2}\right).$$

Temos $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h(r)$. Logo

$$V(r) = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2 \left(8 - \frac{16\,r}{\sqrt{47}}\right).$$

(c) `> V:=r->1/3*Pi*r^2*(8-16*r/sqrt(47));`

Com " `>plot(V(r), r=0..sqrt(47)/2);` " vemos onde V tem máximo global.

Escolhendo $r = 2,28521$ em "`>plot(V(r), r=2.28..2.29);`" temos

erro $< 2,29 - 2,28 = 0,01 = 10^{-2}$.

Resposta: $r = 2,28521$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IVb   em 8 abril de 2013

Questão 1.

Pela propriedade (ii), a primeira coordenada do vértice da parábola é $x_v = 8$. Pela propriedade (iii), a segunda coordenada do vértice da parábola é $y_v = 8$. Existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, tal que $f(x) = \mu\,(x-8)^2 + 8$. Por (iv), $0 = \mu\,(0-8)^2 + 8$, daí $\mu = -\frac{1}{8}$ e

Expressão de f: $\quad f(x) = -\dfrac{1}{8}\,(x-8)^2 + 8.$

Questão 2.

(a) y deve ser tal que $(3,5-3)^2 - 9 \leq y \leq -(3,5-3)^2+4$, ou seja $0,25-9 \leq y \leq -0,25+4$.

Resposta: $y \in [-8,75; 3,75]$

(b) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = (x-3)^2 - 9$ e $g(x) = -(x-3)^2 + 4$, com isso temos que decidir se vale $f(5,548) \leq -2,48 \leq g(5,548)$.

```
> f:=x->(x-3)^2-9;
> g:=x->-(x-3)^2+4;
> f(5.548);
> g(5.548);
```

Com as contas feitas no maple, vemos que $f(5,548) < g(5,548) < -2,48$ e que o ponto $(5,548; -2,48)$ não pertence à região $\mathcal{R}$.

Questão 3.

(a) `> f:=x->x*(x-5);   > f(3); f(1/3); f(17/6);`

A taxa média de variação de f em $[1/3, 3]$ é

$$\frac{f(3) - f(1/3)}{3 - 1/3} = \frac{-6 - (-14/9)}{8/3} = \frac{-40/9}{8/3} = -\frac{5}{3},$$

e queremos que

$$\frac{f(17/6) - f(a)}{17/6 - a} = -\frac{5}{3}.$$

Usando o maple para a conta: `> solve((f(17/6)-f(a))/(17/6-a)=-5/3);`

temos $\quad u = \dfrac{1}{2}.$

(b) A inclinação da reta é a taxa média de variação de f em $[a, 17/6] = [1/2, 17/6]$. Equação da reta: $y - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Fazendo "`> f(1/2);`", temos

$$y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}.$$

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{8-h(r)}{r} = \dfrac{8}{\sqrt{43}/2}$, logo

$$h(r) = 8 - \frac{16\,r}{\sqrt{43}}.$$

(b) Domínio: $r > 0$, pois r é o raio do cone menor, além disso $2\,r <$ diâmetro do cone maior $= \sqrt{43}$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(V) = \left(0, \frac{\sqrt{43}}{2}\right).$$

Temos $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h(r)$. Logo

$$V(r) = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\left(8 - \frac{16\,r}{\sqrt{43}}\right).$$

(c) `> V:=r->1/3*Pi*r^2*(8-16*r/sqrt(43));`

Com " `>plot(V(r), r=0..sqrt(43)/2);` " vemos onde V tem máximo global.

Escolhendo $r = 2,18581$ em "`>plot(V(r), r=2.18..2.19);` " temos

erro $< 2,19 - 2,18 = 0,01 = 10^{-2}$.

Resposta: $r = 2,18581$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – Va em 8 abril de 2013

Questão 1.

Pela propriedade (ii), a primeira coordenada do vértice da parábola é $x_v = 7$. Pela propriedade (iii), a segunda coordenada do vértice da parábola é $y_v = 7$. Existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, tal que $f(x) = \mu\,(x-7)^2 + 7$. Por (iv), $0 = \mu\,(0-7)^2 + 7$, daí $\mu = -\frac{1}{7}$ e

Expressão de f: $f(x) = -\dfrac{1}{7}\,(x-7)^2 + 7.$

Questão 2.

(a) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = (x-4)^2 - 5$ e $g(x) = -(x-4)^2 + 8$. Com isso x deve satisfazer $f(x) \leq 6 \leq g(x)$.

```
> f:=x->(x-4)^2-5;
> g:=x->-(x-4)^2+8;
> plot([f(x), g(x), 6], x=0..8);
> solve(g(x)=6);
```

Resposta: $x \in \left[4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right]$

(b) Temos que decidir se vale $f(1,4505) \leq 1,499 \leq g(1,4505)$.

```
> f(1.4505);
> g(1.4505);
```

Com as contas feitas no maple, vemos que $1,499 < f(1,4505) < g(1,4505)$ e que o ponto $(1,4505; 1,499)$ não pertence à região $\mathcal{R}$.

Questão 3.

(a) `> f:=x->x*(x-5);   > f(3); f(2/3); f(1/2);`

A taxa média de variação de f em $[2/3, 3]$ é

$$\frac{f(3)-f(2/3)}{3-2/3} = \frac{-6-(-26/9)}{7/3} = \frac{-28/9}{7/3} = -\frac{4}{3},$$

e queremos que

$$\frac{f(u)-f(1/2)}{u-1/2} = -\frac{4}{3}.$$

Usando o maple para a conta: `> solve((f(u)-f(1/2))/(u-1/2)=-4/3);`

temos $u = \dfrac{19}{6}$.

(b) A inclinação da reta é a taxa média de variação de f em $[1/2, u] = [1/2, 19/6]$. Equação da reta: $y - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}\,\left(x - \frac{1}{2}\right)$, ou seja,

$$y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}.$$

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{11-h(r)}{r} = \dfrac{11}{\sqrt{47}/2}$, logo

$$h(r) = 11 - \frac{22\,r}{\sqrt{47}}.$$

(b) Domínio: $r > 0$, pois r é o raio do cone menor, além disso $2\,r <$ diâmetro do cone maior $= \sqrt{47}$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(V) = \left(0, \frac{\sqrt{47}}{2}\right).$$

Temos $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h(r)$. Logo

$$V(r) = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\left(11 - \frac{22\,r}{\sqrt{47}}\right).$$

(c) `> V:=r->1/3*Pi*r^2*(11-22*r/sqrt(47));`

Com " `>plot(V(r), r=0..sqrt(47)/2);` " vemos onde V tem máximo global.

Escolhendo $r = 2,28521$ em "`>plot(V(r), r=2.28..2.29);` " temos

erro $< 2,29 - 2,28 = 0,01 = 10^{-2}$.

Resposta: $r = 2,28521$

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – Vb   em 8 abril de 2013

Questão 1.

Pela propriedade (ii), a primeira coordenada do vértice da parábola é $x_v = 10$. Pela propriedade (iii), a segunda coordenada do vértice da parábola é $y_v = 10$. Existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, tal que $f(x) = \mu\,(x-10)^2 + 10$. Por (iv), $0 = \mu\,(0-10)^2 + 10$, daí $\mu = -\frac{1}{10}$ e

Expressão de f: $\quad f(x) = -\dfrac{1}{10}\,(x-10)^2 + 10.$

Questão 2.

(a) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = (x-4)^2 - 5$ e $g(x) = -(x-4)^2 + 8$. Com isso x deve satisfazer $f(x) \leq 5 \leq g(x)$.

```
> f:=x->(x-4)^2-5;
> g:=x->-(x-4)^2+8;
> plot([f(x), g(x), 5], x=0..8);
> solve(g(x)=5);
```

Resposta: $x \in \left[4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}\right]$

(b) Temos que decidir se vale $f(6,549) \leq 1,5028 \leq g(6,549)$.

```
> f(6.549);
> g(6.549);
```

Com as contas feitas no maple, vemos que $f(6,549) < g(6,549) < 1,5028$ e que o ponto $(6,549; 1,5028)$ não pertence à região $\mathcal{R}$.

Questão 3.

(a) `> f:=x->x*(x-5);`   `> f(3); f(2/3); f(19/6);`

A taxa média de variação de f em $[2/3, 3]$ é

$$\frac{f(3)-f(2/3)}{3-2/3} = \frac{-6-(-26/9)}{7/3} = \frac{-28/9}{7/3} = -\frac{4}{3},$$

e queremos que

$$\frac{f(19/6)-f(a)}{19/6-a} = -\frac{4}{3}.$$

Usando o maple para a conta: `> solve((f(19/6)-f(a))/(19/6-a)=-4/3);`

temos $\quad u = \dfrac{1}{2}.$

(b) A inclinação da reta é a taxa média de variação de f em $[a, 19/6] = [1/2, 19/6]$. Equação da reta: $y - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Fazendo "`> f(1/2);`", temos

$$y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}.$$

Questão 4.

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{11 - h(r)}{r} = \dfrac{11}{\sqrt{43}/2}$, logo

$$h(r) = 11 - \frac{22\,r}{\sqrt{43}}.$$

(b) Domínio: $r > 0$, pois r é o raio do cone menor, além disso $2\,r <$ diâmetro do cone maior $= \sqrt{43}$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(V) = \left(0, \frac{\sqrt{43}}{2}\right).$$

Temos $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h(r)$. Logo

$$V(r) = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2 \left(11 - \frac{22\,r}{\sqrt{43}}\right).$$

(c) `> V:=r->1/3*Pi*r^2*(11-22*r/sqrt(43));`

Com “ `>plot(V(r), r=0..sqrt(43)/2);` ” vemos onde V tem máximo global.

Escolhendo $r = 2,18581$ em “`>plot(V(r), r=2.18..2.19);` ” temos

erro $< 2,19 - 2,18 = 0,01 = 10^{-2}$.

Resposta: $r = 2,18581$