MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

G2 – GABARITO RESUMIDO – Ia feita em 20 maio de 2013

Questão 1

(a) $\mathcal{P} = \dfrac{5 \cdot 2\pi}{2} = 5\pi.$

Como $-1 \leq \operatorname{sen}(z) \leq 1$, temos $-(\pi+1) \leq (\pi+1)\operatorname{sen}(z) \leq \pi+1$, e $-(\pi+1)+\pi-1 \leq (\pi+1)\operatorname{sen}(z)+\pi-1 \leq \pi+1+\pi-1$. Logo $-2 \leq f(x) \leq 2\pi$, daí $\mathrm{Im}(f) = [-2,\, 2\pi]$.

(b) `> f:=x->(Pi+1)*sin(2*x/5)+Pi-1; > plot(f(x), x=-4*Pi..7*P1);`

Como 2π é a valor máximo de f, fazendo " `> solve(f(x)=2*Pi);`", temos

$$x \in \left\{\frac{5\pi}{4},\, \frac{5\pi}{4} - \mathcal{P},\, \frac{5\pi}{4} + \mathcal{P}\right\} = \left\{-\frac{15\pi}{4},\, \frac{5\pi}{4},\, \frac{25\pi}{4}\right\}.$$

(c) Com "`> plot([f(x),(3*Pi-1)/2], x=0..10);`" vemos duas soluções, x_1 e x_2.

Fazendo " `> solve(f(x)=(3*Pi-1)/2);`", temos $x_1 = \dfrac{5\pi}{12}$.

A distância entre x_1 e $\dfrac{5\pi}{4}$, onde f tem máximo, é $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{25\pi}{12}.$$

Questão 2

(a) `> g:=x->1/((x-1)^2+3);   solve(D(D(g))(x)>0);   solve(D(D(g))(x)<0);`

A função g troca de concavidade em $x_1 = 0$ e em $x_2 = 2$.

(b) $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Como o gráfico de f'' é uma parábola, basta que $f''(0) = f''(2) = 0$.

```
> f:=x->x^4/12+a*x^3+b*x^2+x+5;
> solve({D(D(f))(0)=0, D(D(f))(2)=0});
```

Resposta: $a = -\dfrac{1}{3}$ e $b = 0$.

(c)
```
> f:=x->x^4/12-1/3*x^3+0*x^2+x+5;
> r:=x->D(f)(0)*(x-0)+f(0);
> s:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);
> plot([f(x), r(x), s(x)], x=-1..3, y=4..7);
```

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 0$ e também em $x_2 = 2$. OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 0$ e/ou em $x_2 = 2$.

Questão 3

Equação de r: $\quad y = f'(u)(x-u) + f(u) = f'(v)(x-v) + f(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}}\ x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{f'(v)}^{\text{c. angular}}\ x + \underbrace{f'(v)(-v) + f(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) `> f:=x->x^4-86/3*x^3+2713/9*x^2-1372*x+2000;`

`> solve({D(f)(u)=D(f)(v), D(f)(u)*(-u)+f(u)=D(f)(v)*(-v)+f(v)});`

Resposta: $u = \dfrac{16}{3}$ e $v = 9$.

(b) `> D(f)(9)*(x-9)+f(9);` Equação de r: $y = 4\,x - 304$.

Questão 4

(a) D$= (z, 2z)$. C$= (u, 2z) = (u, (u-5)^2)$, logo $(u-5)^2 = 2z$, daí $u = 5 - \sqrt{2z}$. Assim C$= (5 - \sqrt{2z}, 2z)$.

(b) Fazendo "`>solve(2*x=(x-5)^2);`", temos $P_1 = (6 - \sqrt{11}, 2\,(6 - \sqrt{11}))$. Como D deve estar entre a origem e P_1, z deve estar entre 0 e $6 - \sqrt{11}$. Dom$(f) = (0, 6 - \sqrt{11})$.

Distância entre A e B em função de z: $5 - \sqrt{2z} - z$. Logo $f(z) = (5 - \sqrt{2z} - z)\,2z$.

(c) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

`> f:=z->(5-sqrt(2*z)-z)*2*z;`

`> solve(D(f)(z)>0);` `> solve(D(f)(z)<0);`

f é crescente em $\left(0, \frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}\right]$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(0, \frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}\right)$.

f é decrescente em $\left[\frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}, 6 - \sqrt{11}\right)$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(\frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}, 6 - \sqrt{11}\right)$.

Logo f tem máximo em $z = \dfrac{49}{16} - \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

G2 – GABARITO RESUMIDO – Ib   feita em 20 maio de 2013

Questão 1

(a) $\mathcal{P} = \dfrac{5 \cdot 2\pi}{2} = 5\pi.$

Como $-1 \le \operatorname{sen}(z) \le 1$, temos $-(\pi+1) \le (\pi+1)\operatorname{sen}(z) \le \pi + 1$, e $-(\pi+1) + \pi - 1 \le (\pi+1)\operatorname{sen}(z) + \pi - 1 \le \pi + 1 + \pi - 1$. Logo $-2 \le f(x) \le 2\pi$, daí $\operatorname{Im}(f) = [-2, 2\pi]$.

(b) `> f:=x->(Pi+1)*sin(2*x/5)+Pi-1; > plot(f(x), x=-9*Pi..5*Pi);`

Como -2 é a valor mínimo de f, fazendo "`> solve(f(x)=-2);`", temos

$$x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4} - \mathcal{P}, -\frac{5\pi}{4} + \mathcal{P}\right\} = \left\{-\frac{25\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\}.$$

(c) Com "`> plot([f(x),(Pi-3)/2], x=-10..0);`" vemos duas soluções, x_1 e x_2.

Fazendo "`> solve(f(x)=(Pi-3)/2);`", temos $x_1 = -\dfrac{5\pi}{12}$.

A distância entre x_1 e $-\dfrac{5\pi}{4}$, onde f tem máximo, é $-\dfrac{5\pi}{12} - \left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = -\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{25\pi}{12}.$$

Questão 2

(a) `> g:=x->1/((x-2)^2+3);   solve(D(D(g))(x)>0);   solve(D(D(g))(x)<0);`

A função g troca de concavidade em $x_1 = 1$ e em $x_2 = 3$.

(b) $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Como o gráfico de f'' é uma parábola, basta que $f''(1) = f''(3) = 0$.

```
> f:=x->x^4/12+a*x^3+b*x^2-x+1;
> solve({D(D(f))(1)=0, D(D(f))(3)=0});
```

Resposta: $a = -\dfrac{2}{3}$ e $b = \dfrac{3}{2}$.

(c)
```
> f:=x->x^4/12-2/3*x^3+3/2*x^2-x+1;
> r:=x->D(f)(1)*(x-1)+f(1);
> s:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);
> plot([f(x), r(x), s(x)], x=0..5, y=-1..2);
```

Sim. A convavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 1$ e também em $x_2 = 3$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 1$ e/ou em $x_2 = 3$.

Questão 3

Equação de r: $\quad y = f'(u)(x-u) + f(u) = f'(v)(x-v) + f(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}}\; x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{f'(v)}^{\text{c. angular}}\; x + \underbrace{f'(v)(-v) + f(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) `> f:=x->9*x^4-294*x^3+3541*x^2-18584*x+500;`

`> solve({D(f)(u)=D(f)(v), D(f)(u)*(-u)+f(u)=D(f)(v)*(-v)+f(v)});`

Resposta: $u = \dfrac{19}{3}$ e $v = 10$.

(b) `> D(f)(10)*(x-10)+f(10);` Equação de r: $y = 36\,x - 35600$.

Questão 4

(a) D= $(z, 2z)$. C= $(u, 2z) = (u, (u-6)^2)$, logo $(u-6)^2 = 2z$, daí $u = 6 - \sqrt{2z}$. Assim C= $(6 - \sqrt{2z}, 2z)$.

(b) Fazendo "`>solve(2*x=(x-6)^2);`", temos $P_1 = (7-\sqrt{13}, 2\,(7-\sqrt{13}))$. Como D deve estar entre a origem e P_1, z deve estar entre 0 e $7-\sqrt{13}$. $\quad \mathrm{Dom}(f) = (0, 7-\sqrt{13})$.

Distância entre A e B em função de z: $\quad 6 - \sqrt{2z} - z$. Logo $\quad f(z) = (6 - \sqrt{2z} - z)\,2z$.

(c) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

`> f:=z->(6-sqrt(2*z)-z)*2*z;`

`> solve(D(f)(z)>0);` `> solve(D(f)(z)<0);`

f é crescente em $\left(0, \frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}\right]$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(0, \frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}\right)$.

f é decrescente em $\left[\frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}, 7-\sqrt{13}\right)$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(\frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}, 7-\sqrt{13}\right)$.

Logo f tem máximo em $z = \dfrac{56}{16} - \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}$.