Gabarito da P3, 2012.2

Questão 1

Pelo Teo. da Divergência,

$$\Phi = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_E \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_E z^2\,dV,$$

onde E é o elipsóide sólido, delimitado por S e $\nabla\cdot\mathbf{F} = 3z^2$.

Da eq. do elipsóide: $z^2 = 4(1-r^2)$, onde $r^2 = x^2+y^2 \leq 1$. Assim, temos:

$$3\iiint_E z^2\,dV = 3\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^1\Big[\int_{-4\sqrt{1-r^2}}^{4\sqrt{1-r^2}} z^2\,dz\Big]r\,dr\Big]d\theta = 6\pi\int_0^1 \big[\frac{z^3}{3}\big]_{-4\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dr$$
$$= 32\pi\int_0^1 (1-r^2)^{3/2} r\,dr = 16\pi\int_0^1 v^{3/2}\,dv = \frac{32\pi}{5}.$$

Ou seja, o fluxo é $\Phi = \dfrac{32\pi}{5}$.

Questão 2

item (a): Como temos a liberdade de escolher a superfície cujo bordo é ∂S, tomamos aquela mais simples, a saber o disco D com centro na origem e raio 4 no plano $z = 0$. Assim,

$$\oint\limits_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{k}}\,dx\,dy.$$

Agora,

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y-4 & 3xy & 2xz+z^2 \end{bmatrix} = (0, 2z, 3y-1).$$

Portanto,

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{k}}\, dx,\, dy = 3 \iint_D y dx\, dy - \iint_D dx\, dy = -A(D) = -16\pi,$$

já que a primeira integral acima é nula, devido ao integrando ímpar em y.

Concluímos que

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -16\pi.$$

item (b): Parametrizamos o círculo $\partial S : \mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t, 0)$, para $t \in [0, 2\pi]$. Temos então:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} (4\mathrm{sen} t - 4, 48\cos t\, \mathrm{sen} t\, t, 0) \cdot (-4\,\mathrm{sen}\, t, 4\cos t, 0)\, dt \\ = \int_0^{2\pi} \big(-16\,\mathrm{sen}^2\, t + 16\,\mathrm{sen}\, t + 192\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t \big)\, dt &= -16 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 t\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\frac{1 - \cos 2t}{2}\big) dt = -16\pi, \end{aligned}$$

onde usamos que a segunda integral do ante-penúltimo termo é zero, assim como a terceira, usando a substituição $v = \cos t$.

Questão 3

item(a): **FALSA**.

Note primeiro que $(-2, 2, 0)$ satisfaz a equação dada: $-2^3 + 2.4 - 8.2.0 - 3.0.2 = -8 + 8 = 0$.

Agora, se $F(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3 y$, temos

$$\nabla F(x, y, z) = (3x^2 + 8z^2, 4y - 3z^3, 16xz - 9z^2 y),$$

logo $\nabla F(-2, 2, 0) = (12, 8, 0)$ e portanto pelo teo. da função implícita a eq. é localmente o gráfico de uma função suave, na vizinhança de $(-2, 2, 0)$, logo admite plano tangente de equação $(12, 8, 0) \cdot (x + 2, y - 2, z - 0) = 0$ ou $3x + 2y + 2 = 0$.

item(b): VERDADEIRA.

Basta calcular:

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \\ z^3/3+1 & x^3/3 & y^3/3+4 \end{bmatrix}$$

$$= (y^2, z^2, x^2) = \mathbf{F}.$$