

Questão 1

$$(a) \mathcal{P} = \frac{5 \cdot 2\pi}{2} = 5\pi.$$

Como $-1 \leq \sin(z) \leq 1$, temos $-2(\pi + 1) \leq 2(\pi + 1)\sin(z) \leq 2(\pi + 1)$, e $-2(\pi + 1) + 2\pi - 2 \leq 2(\pi + 1)\sin(z) + 2\pi - 2 \leq 2(\pi + 1) + 2\pi - 2$. Logo $-4 \leq f(x) \leq 4\pi$, daí $\text{Im}(f) = [-4, 4\pi]$.

$$(b) > f:=x->2*(\text{Pi}+1)*\sin(2*x/5)+2*\text{Pi}-2; > \text{plot}(f(x), x=-4*\text{Pi}..7*\text{Pi});$$

Como 4π é o valor máximo de f , fazendo “ $> \text{solve}(f(x)=4*\text{Pi});$ ”, temos

$$x \in \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} - \mathcal{P}, \frac{5\pi}{4} + \mathcal{P} \right\} = \left\{ -\frac{15\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{25\pi}{4} \right\}.$$

(c) Com “ $> \text{plot}([f(x), 3*\text{Pi}-1], x=0..10);$ ” vemos duas soluções, x_1 e x_2 .

Fazendo “ $> \text{solve}(f(x)=3*\text{Pi}-1);$ ”, temos $x_1 = \frac{5\pi}{12}$.

A distância entre x_1 e $\frac{5\pi}{4}$, onde f tem máximo, é $\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{25\pi}{12}.$$

Questão 2

$$(a) > g:=x->-1/((x-1)^2+3); \text{solve}(D(D(g))(x)>0); \text{solve}(D(D(g))(x)<0);$$

A função g troca de concavidade em $x_1 = 0$ e em $x_2 = 2$.

(b) $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Como o gráfico de f'' é uma parábola, basta que $f''(0) = f''(2) = 0$.

$$> f:=x->x^4/12+a*x^3+b*x^2+x+5;$$

$$> \text{solve}(\{D(D(f))(0)=0, D(D(f))(2)=0\});$$

$$\text{Resposta: } a = -\frac{1}{3} \text{ e } b = 0.$$

$$(c) > f:=x->x^4/12-1/3*x^3+0*x^2+x+5;$$

$$> r:=x->D(f)(0)*(x-0)+f(0);$$

$$> s:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);$$

$$> \text{plot}([f(x), r(x), s(x)], x=-1..3, y=4..7);$$

Sim. A concavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 0$ e também em $x_2 = 2$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 0$ e/ou em $x_2 = 2$.

Questão 3

Equação de r : $y = f'(u)(x - u) + f(u) = f'(v)(x - v) + f(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{f'(v)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{f'(v)(-v) + f(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) `> f:=x->9*x^4-330*x^3+4477/9*x^2-26584*x+500;`

`> solve({D(f)(u)=D(f)(v), D(f)(u)*(-u)+f(u)=D(f)(v)*(-v)+f(v)});`

Resposta: $u = \frac{22}{3}$ e $v = 11$.

(b) `> D(f)(11)*(x-11)+f(11);` Equação de r : $y = 36x - 58064$.

Questão 4

(a) $D = (z, 2z)$. $C = (u, 2z) = (u, (u - 5)^2)$, logo $(u - 5)^2 = 2z$, daí $u = 5 - \sqrt{2z}$. Assim $C = (5 - \sqrt{2z}, 2z)$.

(b) Fazendo "`>solve(2*x=(x-5)^2);`", temos $P_1 = (6 - \sqrt{11}, 2(6 - \sqrt{11}))$. Como D deve estar entre a origem e P_1 , z deve estar entre 0 e $6 - \sqrt{11}$. $\text{Dom}(f) = (0, 6 - \sqrt{11})$.

Distância entre A e B em função de z : $5 - \sqrt{2z} - z$. Logo $f(z) = (5 - \sqrt{2z} - z)2z$.

(c) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

`> f:=z->(5-sqrt(2*z)-z)*2*z;`

`> solve(D(f)(z)>0);` `> solve(D(f)(z)<0);`

f é crescente em $\left(0, \frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}\right]$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(0, \frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}\right)$.

f é decrescente em $\left[\frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}, 6 - \sqrt{11}\right)$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(\frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}, 6 - \sqrt{11}\right)$.

Logo f tem máximo em $z = \frac{49}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{178}}{32}$.

Questão 1

$$(a) \mathcal{P} = \frac{5 \cdot 2\pi}{2} = 5\pi.$$

Como $-1 \leq \sin(z) \leq 1$, temos $-2(\pi + 1) \leq 2(\pi + 1)\sin(z) \leq 2(\pi + 1)$, e $-2(\pi + 1) + 2\pi - 2 \leq 2(\pi + 1)\sin(z) + 2\pi - 2 \leq 2\pi + 2 + 2\pi - 2$. Logo $-4 \leq f(x) \leq 4\pi$, daí $\text{Im}(f) = [-4, 4\pi]$.

$$(b) > f:=x->2*(\text{Pi}+1)*\sin(2*x/5)+2*\text{Pi}-2; > \text{plot}(f(x), x=-9*\text{Pi}..5*\text{Pi});$$

Como -4 é a valor mínimo de f , fazendo “ $> \text{solve}(f(x)=-4);$ ”, temos

$$x \in \left\{ -\frac{5\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4} - \mathcal{P}, -\frac{5\pi}{4} + \mathcal{P} \right\} = \left\{ -\frac{25\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \right\}.$$

(c) Com “ $> \text{plot}([f(x), (\text{Pi}-3)/2], x=-10..0);$ ” vemos duas soluções, x_1 e x_2 .

$$\text{Fazendo “} > \text{solve}(f(x)=\text{Pi}-3);$$
, temos $x_1 = -\frac{5\pi}{12}$.

A distância entre x_1 e $-\frac{5\pi}{4}$, onde f tem máximo, é $-\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = -\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{25\pi}{12}.$$

Questão 2

$$(a) > g:=x->-1/((x-2)^2+3); \text{ solve}(D(D(g))(x)>0); \text{ solve}(D(D(g))(x)<0);$$

A função g troca de concavidade em $x_1 = 1$ e em $x_2 = 3$.

(b) $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Como o gráfico de f'' é uma parábola, basta que $f''(1) = f''(3) = 0$.

$$> f:=x->x^4/12+a*x^3+b*x^2-x+1;$$

$$> \text{solve}(\{D(D(f))(1)=0, D(D(f))(3)=0\});$$

$$\text{Resposta: } a = -\frac{2}{3} \text{ e } b = \frac{3}{2}.$$

$$(c) > f:=x->x^4/12-2/3*x^3+3/2*x^2-x+1;$$

$$> r:=x->D(f)(1)*(x-1)+f(1);$$

$$> s:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);$$

$$> \text{plot}([f(x), r(x), s(x)], x=0..5, y=-1..2);$$

Sim. A concavidade do gráfico de f aparentemente muda em $x_1 = 1$ e também em $x_2 = 3$.
OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x_1 = 1$ e/ou em $x_2 = 3$.

Questão 3

Equação de r : $y = f'(u)(x - u) + f(u) = f'(v)(x - v) + f(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{f'(v)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{f'(v)(-v) + f(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) $> f := x \rightarrow 9x^4 - 222x^3 + 1993x^2 - 7660x + 500$;

$> \text{solve}(\{D(f)(u) = D(f)(v), D(f)(u) * (-u) + f(u) = D(f)(v) * (-v) + f(v)\})$;

Resposta: $u = \frac{13}{3}$ e $v = 8$.

(b) $> D(f)(8) * (x - 8) + f(8)$; Equação de r : $y = 36x - 10316$.

Questão 4

(a) $D = (z, 2z)$. $C = (u, 2z) = (u, (u - 6)^2)$, logo $(u - 6)^2 = 2z$, daí $u = 6 - \sqrt{2z}$. Assim $C = (6 - \sqrt{2z}, 2z)$.

(b) Fazendo " $> \text{solve}(2 * x = (x - 6)^2)$ ";, temos $P_1 = (7 - \sqrt{13}, 2(7 - \sqrt{13}))$. Como D deve estar entre a origem e P_1 , z deve estar entre 0 e $7 - \sqrt{13}$. $\text{Dom}(f) = (0, 7 - \sqrt{13})$.

Distância entre A e B em função de z : $6 - \sqrt{2z} - z$. Logo $f(z) = (6 - \sqrt{2z} - z)2z$.

(c) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

$> f := z \rightarrow (6 - \text{sqrt}(2 * z) - z) * 2 * z$;

$> \text{solve}(D(f)(z) > 0)$; $> \text{solve}(D(f)(z) < 0)$;

f é crescente em $\left(0, \frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}\right]$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(0, \frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}\right)$.

f é decrescente em $\left[\frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}, 7 - \sqrt{13}\right)$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(\frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}, 7 - \sqrt{13}\right)$.

Logo f tem máximo em $z = \frac{56}{16} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{210}}{32}$.