MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

G2 – GABARITO RESUMIDO – IIIa feita em 20 maio de 2013

**Questão 1**

(a) $\mathcal{P} = \dfrac{4 \cdot 2\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$. $\mathcal{A} = \dfrac{3-(-3)}{2} = 3$.

(b) `> f:=x->3*sin(3*x/4);` `> plot(f(x), x=-2*Pi..5*P1);`

Como $-3$ é o valor mínimo de $f$, fazendo " `> solve(f(x)=-3);`", temos

$$x \in \left\{-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3}+\mathcal{P},\ -\frac{2\pi}{3}+2\mathcal{P}\right\} = \left\{-\frac{2\pi}{3},\ 2\pi,\ \frac{14\pi}{3}\right\}.$$

(c) Com "`> plot([f(x),-3/2], x=2..10);`" vemos duas soluções, $x_1$ e $x_2$.

Fazendo " `> solve(f(x)=-3/2);`", temos uma solução fora do intervalo pedido: $-\frac{2\pi}{9}$. Observamos que $f(4\pi/3) = f(8\pi/3) = 0$. Logo, por simetria,

$$x_1 = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} = \frac{14\pi}{9} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{8\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} = \frac{22\pi}{9}.$$

**Questão 2**

(a) $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x_1 = 1$, em $x_2 = 4$ e em $x_3 = 7$. Como $f''$ é uma função polinomial de grau 3, $f''(x)$ troca de sinal em torno de suas raízes quando tem três raízes distintas, portanto basta que $f''(1) = 0, f''(4) = 0$ e $f''(7) = 0$.

```
> f:=x->x^5/20+a*x^4+b*x^3+c*x^2+5;
> solve({ D(D(f))(1)=0, D(D(f))(4)=0, D(D(f))(7)=0 });
```

Resposta: $a = -1$, $b = \dfrac{13}{2}$ e $c = -14$.

(b) `> a:=-1; b:=13/2; c:=-14;`

```
> r:=x->D(f)(1)*(x-1)+f(1);
> s:=x->D(f)(4)*(x-4)+f(4);
> t:=x->D(f)(7)*(x-7)+f(7);
> plot([f(x), r(x), s(x), t(x)], x=-1..9, y=-40..20);
```

Sim. A convavidade do gráfico de $f$ aparentemente muda em $x_1 = 1$, em $x_2 = 4$ e também em $x_3 = 7$. OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de $f$ em $x_1 = 1$ e/ou em $x_2 = 4$ e/ou em $x_3 = 7$.

**Questão 3**

A equação da reta tangente ao gráfico $f$ no ponto $P = (a, f(a))$ é dada por

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Esta reta passa pelo ponto $A = (0, 0) \iff 0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$.

```
> f:=x->x^4+23/5*x^3+139/25*x^2+873/500*x+2736/625;
> solve(D(f)(a)*(0-a)+f(a)=0);
> D(f)(3/5)*(x-3/5)+f(3/5);
> D(f)(-12/5)*(x+12/5)+f(-12/5);
```

Portanto as equações são:

$$y = -\frac{3}{4}\,x \quad \text{e} \quad y = \frac{57}{4}\,x.$$

**Questão 4**

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{y_A(x)}{x} = \dfrac{11}{x-7}$, logo

$$y_A(x) = \frac{11\,x}{x-7}.$$

(b) Domínio: $x > 7$, pois $B$ está à direita de $(7, 0)$, logo $\mathrm{Dom}(f) = (7, +\infty)$.

Temos $(f(x))^2 = x^2 + (y_A(x))^2$. Logo

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{11\,x}{x-7}\right)^2}.$$

(c) `>f:=x->sqrt(x^2+((11*x)/(x-7))^2);`

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$:

`> solve(D(f)(x)>0);`     `> solve(D(f)(x)<0);`

f é decrescente em $\left(7, \sqrt[3]{847} + 7\right]$, pois $f'(x) < 0$ quando $x \in \left(7, \sqrt[3]{847} + 7\right)$.

f é crescente em $\left[\sqrt[3]{847} + 7, \infty\right)$, pois $f'(x) > 0$ quando $x \in \left(\sqrt[3]{847} + 7, \infty\right)$.

Logo $f$ tem mínimo em $x = \sqrt[3]{847} + 7$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

G2 – GABARITO RESUMIDO – IIIb feita em 20 maio de 2013

**Questão 1**

(a) $\mathcal{P} = \dfrac{4 \cdot 2\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$. $\mathcal{A} = \dfrac{3-(-3)}{2} = 3$.

(b) `> f:=x->3*sin(3*x/4);` `> plot(f(x), x=-9*Pi..2*P1);`

Como 3 é o valor mínimo de $f$, fazendo "`> solve(f(x)=3);`", temos

$$x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \mathcal{P}, \frac{2\pi}{3} - 2\mathcal{P}, \frac{2\pi}{3} - 3\mathcal{P}\right\} = \left\{\frac{2\pi}{3}, -2\pi, -\frac{14\pi}{3}, -\frac{22\pi}{3}\right\}.$$

(c) Com "`> plot(f(x), x=15..25);`" vemos duas soluções, $x_1$ e $x_2$.

Com "`> plot(f(x), x=0..25);`" vemos que as soluções positivas de $f(x) = 0$ até 25 são: $\mathcal{P}/2, 2\mathcal{P}/2, 3\mathcal{P}/2, 4\mathcal{P}/2$ e $5\mathcal{P}/2$. Logo

$$x_1 = \frac{16\pi}{3} \text{ e } x_2 = \frac{20\pi}{3}.$$

**Questão 2**

(a) $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x_1 = 2$, em $x_2 = 5$ e em $x_3 = 8$. Como $f''$ é uma função polinomial de grau 3, $f''(x)$ troca de sinal em torno de suas raízes quando tem três raízes distintas, portanto basta que $f''(2) = 0, f''(5) = 0$ e $f''(8) = 0$.

```
> f:=x->x^5/20+a*x^4+b*x^3+c*x^2+5;
> solve({ D(D(f))(2)=0, D(D(f))(5)=0, D(D(f))(8)=0 });
```

Resposta: $a = -\dfrac{5}{4}$, $b = 11$ e $c = -40$.

(b) `> a:=-5/4; b:=11; c:=-40;`

```
> r:=x->D(f)(2)*(x-2)+f(2);
> s:=x->D(f)(5)*(x-5)+f(5);
> t:=x->D(f)(8)*(x-8)+f(8);
> plot([f(x), r(x), s(x), t(x)], x=-1..11, y=-500..20);
```

Sim. A convavidade do gráfico de $f$ aparentemente muda em $x_1 = 2$, em $x_2 = 5$ e também em $x_3 = 8$. OU

Não. As retas não tangenciam o gráfico, e/ou não há troca de concavidade do gráfico de $f$ em $x_1 = 2$ e/ou em $x_2 = 5$ e/ou em $x_3 = 8$.

## Questão 3

A equação da reta tangente ao gráfico $f$ no ponto $P = (a, f(a))$ é dada por

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Esta reta passa pelo ponto $A = (0, 0) \iff 0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$.

```
> f:=x->x^4-23/5*x^3+139/25*x^2-873/500*x+2736/625;
> solve(D(f)(a)*(0-a)+f(a)=0);
> D(f)(-3/5)*(x+3/5)+f(-3/5);
> D(f)(12/5)*(x-12/5)+f(12/5);
```

Portanto as equações são:

$$y = \frac{3}{4}\,x \quad \text{e} \quad y = -\frac{57}{4}\,x.$$

## Questão 4

(a) Por semelhança de triângulos, temos $\dfrac{y_A(x)}{x} = \dfrac{11}{x-6}$, logo

$$y_A(x) = \frac{11\,x}{x-6}.$$

(b) Domínio: $x > 6$, pois $B$ está à direita de $(6, 0)$, logo $\mathrm{Dom}(f) = (6, +\infty)$.

Temos $(f(x))^2 = x^2 + (y_A(x))^2$. Logo

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{11\,x}{x-6}\right)^2}.$$

(c) `>f:=x->sqrt(x^2+((11*x)/(x-6))^2);`

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$:

`> solve(D(f)(x)>0);`     `> solve(D(f)(x)<0);`

f é decrescente em $\left(6, \sqrt[3]{726} + 6\right]$, pois $f'(x) < 0$ quando $x \in \left(6, \sqrt[3]{726} + 6\right)$.

f é crescente em $\left[\sqrt[3]{726} + 6, \infty\right)$, pois $f'(x) > 0$ quando $x \in \left(\sqrt[3]{726} + 6, \infty\right)$.

Logo $f$ tem mínimo em $x = \sqrt[3]{726} + 6$.