MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

G2 – GABARITO RESUMIDO – IVa   feita em 20 maio de 2013

Questão 1

(a) $\mathcal{P} = \dfrac{5 \cdot 2\pi}{3} = \dfrac{10\pi}{3}$.

Como $-1 \leq \cos(z) \leq 1$, temos $-\pi \leq \pi\cos(z) \leq \pi$, e $-\pi - 1 \leq \pi\cos(z) - 1 \leq \pi - 1$. Logo $-\pi - 1 \leq f(x) \leq \pi - 1$, daí o valor mínimo de f é $-\pi - 1$ e o valor máximo é $\pi - 1$.

(b) `> f:=x->Pi*cos(3*x/5)-1;`

Com "`> plot([f(x),-Pi/2-1], x=0..10);`" vemos duas soluções, x_1 e x_2.

Fazendo "`> solve(f(x)=-Pi/2-1);`", temos $x_1 = \dfrac{10\pi}{9}$.

Observamos que f tem máximo em $\dfrac{10\pi}{3}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = \frac{10\pi}{3} - \frac{10\pi}{9} = \frac{20\pi}{9}.$$

(c) `> plot(f(x), x=-4*Pi..6*P1);`

Como $-\pi - 1$ é o valor mínimo de f, fazendo "`> solve(f(x)=-Pi-1);`", temos

$$x \in \left\{ \frac{5\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3} - \mathcal{P},\ \frac{5\pi}{3} + \mathcal{P} \right\} = \left\{ -\frac{5\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ 5\pi \right\}.$$

Questão 2

(a) P deve ser um ponto do gráfico de f, portanto $f(3) = 1$. $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x = 3$, como o gráfico de f'' é uma reta, basta que $f''(3) = 0$.

```
> f:=x->x^3+a*x^2+b*x+4;
> solve({ f(3)=1, D(D(f))(3)=0 });
```

Resposta: $a = -9$ e $b = 17$.

(b) `> a:=-9; > b:=17;`

```
> r:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);
> plot([f(x), r(x)], x=0..6);
```

Sim. O gráfico de f aparentemente passa por P e muda de concavidade em $x = 3$.   OU

Não. O gráfico de f não passa por P e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 3$.

Questão 3

Equação de r: $\quad y = f'(u)(x-u) + f(u) = g'(v)(x-v) + g(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}}\ x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{g'(v)}^{\text{c. angular}}\ x + \underbrace{g'(v)(-v) + g(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) `>f:=x->x^2+5;` `>g:=x->(x-7)^2+10;`

```
> solve({D(f)(u)=D(g)(v), D(f)(u)*(-u)+f(u)=D(g)(v)*(-v)+g(v)});
```

Resposta: $u = \dfrac{5}{14}$ e $v = \dfrac{103}{14}$.

(b) `> D(f)(5/14)*(x-5/14)+f(5/17);` Equação de r: $y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{955}{196}$.

Questão 4

(a) Equação da reta tangente ao gráfico de g em P:

$$y = g'(z)(x-z) + g(z) = -2z\,(x-z) - z^2 + 5.$$

As coordenadas de $A = (0, a(z))$ satisfazem a equação da reta:

$$a(z) = -2z\,(0-z) - z^2 + 5 = z^2 + 5.$$

(b) As coordenadas de $B = (b(z), 0)$ satisfazem a equação da reta:

$$0 = -2z\,(b(x) - z) - z^2 + 5, \text{ logo } b(z) = \frac{z^2+5}{2z}.$$

(c) Como P está no primeiro quadrante, z deve estar entre 0 e a raiz positica de $g(x)$, assim $\mathrm{Dom}(f) = (0, \sqrt{5})$.

$$f(z) = \frac{a(z)\cdot b(z)}{2} = \frac{(z^2+5)^2}{4z}.$$

(d) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

```
> f:=z->(z^2+5)^2/(4*z);
> solve(D(f)(z)>0);     > solve(D(f)(z)<0);
```

f é decrescente em $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(0, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

f é crescente em $\left[\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{5}\right)$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{5}\right)$.

Logo f tem mínimo em $z = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

G2 – GABARITO RESUMIDO – IVb feita em 20 maio de 2013

Questão 1

(a) $\mathcal{P} = \dfrac{5 \cdot 2\pi}{3} = \dfrac{10\pi}{3}$.

Como $-1 \leq \cos(z) \leq 1$, temos $-\pi \leq \pi\cos(z) \leq \pi$, e $-\pi - 1 \leq \pi\cos(z) - 1 \leq \pi - 1$. Logo $-\pi - 1 \leq f(x) \leq \pi - 1$, daí o valor mínimo de f é $-\pi - 1$ e o valor máximo é $\pi - 1$.

(b) `> f:=x->Pi*cos(3*x/5)-1;`

Com "`> plot([f(x),Pi/2-1], x=0..10);`" vemos duas soluções, x_1 e x_2.

Fazendo " `> solve(f(x)=Pi/2-1);`", temos $x_1 = \dfrac{5\pi}{9}$.

Observamos que f tem máximo em $\dfrac{10\pi}{3}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = \frac{10\pi}{3} - \frac{5\pi}{9} = \frac{25\pi}{9}.$$

(c) `> plot(f(x), x=0..13*P1);`   `> plot(f(x), x=3*Pi..13*P1);`

Como $-\pi - 1$ é o valor mínimo de f, fazendo " `> solve(f(x)=-Pi-1);`", temos

$x \in \left\{\dfrac{5\pi}{3} + \mathcal{P},\ \dfrac{5\pi}{3} + 2\mathcal{P},\ \dfrac{5\pi}{3} + 3\mathcal{P}\right\} = \left\{5\pi,\ \dfrac{25\pi}{3},\ \dfrac{35\pi}{3}\right\}$.

Questão 2

(a) P deve ser um ponto do gráfico de f, portanto $f(3) = 1$. $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x = 3$, como o gráfico de f'' é uma reta, basta que $f''(3) = 0$.

```
> f:=x->x^3/3+a*x^2+b*x+1;
> solve({ f(3)=1, D(D(f))(3)=0 });
```

Resposta: $a = -3$ e $b = 6$.

(b) `> a:=-; > b:=6;`

```
> r:=x->D(f)(3)*(x-3)+f(3);
> plot([f(x), r(x)], x=0..6);
```

Sim. O gráfico de f aparentemente passa por P e muda de concavidade em $x = 3$. OU

Não. O gráfico de f não passa por P e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 3$.

Questão 3

Equação de r: $\quad y = f'(u)(x-u) + f(u) = g'(v)(x-v) + g(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}}\ x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{g'(v)}^{\text{c. angular}}\ x + \underbrace{g'(v)(-v) + g(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) `>f:=x->x^2+5;` `>g:=x->(x-6)^2+10;`

```
> solve({D(f)(u)=D(g)(v), D(f)(u)*(-u)+f(u)=D(g)(v)*(-v)+g(v)});
```

Resposta: $u = \dfrac{5}{12}$ e $v = \dfrac{77}{12}$.

(b) `> D(f)(5/12)*(x-5/12)+f(5/12);` Equação de r: $y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{695}{144}$.

Questão 4

(a) Equação da reta tangente ao gráfico de g em P:

$$y = g'(z)(x-z) + g(z) = -2z\,(x-z) - z^2 + 4.$$

As coordenadas de $A = (0, a(z))$ satisfazem a equação da reta:

$$a(z) = -2z\,(0-z) - z^2 + 4 = z^2 + 4.$$

(b) As coordenadas de $B = (b(z), 0)$ satisfazem a equação da reta:

$$0 = -2z\,(b(x) - z) - z^2 + 4, \text{ logo } b(z) = \frac{z^2+4}{2z}.$$

(c) Como P está no primeiro quadrante, z deve estar entre 0 e a raiz positica de $g(x)$, assim $\mathrm{Dom}(f) = (0, 2)$.

$$f(z) = \frac{a(z)\cdot b(z)}{2} = \frac{(z^2+4)^2}{4z}.$$

(d) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

```
> f:=z->(z^2+4)^2/(4*z);
> solve(D(f)(z)>0);     > solve(D(f)(z)<0);
```

f é decrescente em $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

f é crescente em $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.

Logo f tem mínimo em $z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.