

Questão 1

$$(a) \mathcal{P} = \frac{7 \cdot 2\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}.$$

Como $-1 \leq \cos(z) \leq 1$, temos $-\pi \leq \pi \cos(z) \leq \pi$, e $-\pi - 1 \leq \pi \cos(z) - 1 \leq \pi - 1$. Logo $-\pi - 1 \leq f(x) \leq \pi - 1$, daí o valor mínimo de f é $-\pi - 1$ e o valor máximo é $\pi - 1$.

$$(b) > f := x \rightarrow \pi \cdot \cos(3 \cdot x / 7) - 1;$$

Com “> plot([f(x), -Pi/2-1], x=0..15);” vemos duas soluções, x_1 e x_2 .

Fazendo “> solve(f(x)=-Pi/2-1);”, temos $x_1 = \frac{14\pi}{9}$.

Observamos que f tem máximo em $\frac{14\pi}{3}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = \frac{14\pi}{3} - \frac{14\pi}{9} = \frac{28\pi}{9}.$$

$$(c) > \text{plot}(f(x), x=-4 \cdot \pi \dots 9 \cdot \pi);$$

Como $-\pi - 1$ é o valor mínimo de f , fazendo “> solve(f(x)=-Pi-1);”, temos

$$x \in \left\{ \frac{7\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} - \mathcal{P}, \frac{7\pi}{3} + \mathcal{P} \right\} = \left\{ -\frac{7\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, 7\pi \right\}.$$

Questão 2

(a) P deve ser um ponto do gráfico de f , portanto $f(6) = 2$. $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x = 6$, como o gráfico de f'' é uma reta, basta que $f''(6) = 0$.

```
> f := x -> x^3 + a*x^2 + b*x + 2;
> solve({ f(6)=2, D(D(f))(6)=0 });
```

Resposta: $a = -18$ e $b = 72$.

```
(b) > a := -18; > b := 72;
> r := x -> D(f)(6)*(x-6) + f(6);
> plot([f(x), r(x)], x=2..10);
```

Sim. O gráfico de f aparentemente passa por P e muda de concavidade em $x = 6$. OU

Não. O gráfico de f não passa por P e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 6$.

Questão 3

Equação de r : $y = f'(u)(x - u) + f(u) = g'(v)(x - v) + g(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{g'(v)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{g'(v)(-v) + g(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) $> f := x \rightarrow x^2 + 5$; $> g := x \rightarrow (x-7)^2 + 10$;

$> \text{solve}(\{D(f)(u) = D(g)(v), D(f)(u) \cdot (-u) + f(u) = D(g)(v) \cdot (-v) + g(v)\})$;

$$\text{Resposta: } u = \frac{5}{14} \text{ e } v = \frac{103}{14}.$$

(b) $> D(f)(5/14) \cdot (x - 5/14) + f(5/14)$; Equação de r : $y = \frac{5}{7}x + \frac{955}{196}$.

Questão 4

(a) Equação da reta tangente ao gráfico de g em P :

$$y = g'(z)(x - z) + g(z) = -2z(x - z) - z^2 + 7.$$

As coordenadas de $A = (0, a(z))$ satisfazem a equação da reta:

$$a(z) = -2z(0 - z) - z^2 + 7 = z^2 + 7.$$

(b) As coordenadas de $B = (b(z), 0)$ satisfazem a equação da reta:

$$0 = -2z(b(z) - z) - z^2 + 7, \text{ logo } b(z) = \frac{z^2 + 7}{2z}.$$

(c) Como P está no primeiro quadrante, z deve estar entre 0 e a raiz positiva de $g(x)$, assim $\text{Dom}(f) = (0, \sqrt{7})$.

$$f(z) = \frac{a(z) \cdot b(z)}{2} = \frac{(z^2 + 7)^2}{4z}.$$

(d) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

$> f := z \rightarrow (z^2 + 7)^2 / (4 \cdot z)$;

$> \text{solve}(D(f)(z) > 0)$; $> \text{solve}(D(f)(z) < 0)$;

f é decrescente em $\left(0, \frac{\sqrt{21}}{3}\right]$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in \left(0, \frac{\sqrt{21}}{3}\right)$.

f é crescente em $\left[\frac{\sqrt{21}}{3}, \sqrt{7}\right)$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in \left(\frac{\sqrt{21}}{3}, \sqrt{7}\right)$.

Logo f tem mínimo em $z = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Questão 1

$$(a) \mathcal{P} = \frac{7 \cdot 2\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}.$$

Como $-1 \leq \cos(z) \leq 1$, temos $-\pi \leq \pi \cos(z) \leq \pi$, e $-\pi - 1 \leq \pi \cos(z) - 1 \leq \pi - 1$. Logo $-\pi - 1 \leq f(x) \leq \pi - 1$, daí o valor mínimo de f é $-\pi - 1$ e o valor máximo é $\pi - 1$.

$$(b) >f:=x->\text{Pi}*\cos(3*x/5)-1; >\text{plot}(f(x), x=0..17*\text{P1}); >\text{plot}(f(x), x=3*\text{Pi}..17*\text{P1});$$

Como $-\pi - 1$ é o valor mínimo de f , fazendo “> solve(f(x)=-Pi-1);”, temos

$$x \in \left\{ \frac{7\pi}{3} + \mathcal{P}, \frac{7\pi}{3} + 2\mathcal{P}, \frac{7\pi}{3} + 3\mathcal{P} \right\} = \left\{ 7\pi, \frac{35\pi}{3}, \frac{49\pi}{3} \right\}.$$

(c) Com “> plot([f(x), Pi/2-1], x=0..15);” vemos duas soluções, x_1 e x_2 .

Fazendo “> solve(f(x)=Pi/2-1);”, temos $x_1 = \frac{7\pi}{9}$.

Observamos que f tem máximo em $\frac{14\pi}{3}$. Logo, por simetria,

$$x_2 = \frac{14\pi}{3} - \frac{7\pi}{9} = \frac{35\pi}{9}.$$

Questão 2

(a) P deve ser um ponto do gráfico de f , portanto $f(6) = 2$. $f''(x)$ deve trocar de sinal em $x = 6$, como o gráfico de f'' é uma reta, basta que $f''(6) = 0$.

```
> f:=x->x^3/3+a*x^2+b*x+2;
> solve({ f(6)=2, D(D(f))(6)=0 });
```

Resposta: $a = -6$ e $b = 24$.

```
(b) > a:=-6; > b:=24;
> r:=x->D(f)(6)*(x-6)+f(6);
> plot([f(x), r(x)], x=2..10);
```

Sim. O gráfico de f aparentemente passa por P e muda de concavidade em $x = 6$. OU

Não. O gráfico de f não passa por P e/ou não há troca de concavidade do gráfico de f em $x = 6$.

Questão 3

Equação de r : $y = f'(u)(x - u) + f(u) = g'(v)(x - v) + g(v)$

$$y = \overbrace{f'(u)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{f'(u)(-u) + f(u)}_{\text{c. linear}} = \overbrace{g'(v)}^{\text{c. angular}} x + \underbrace{g'(v)(-v) + g(v)}_{\text{c. linear}}$$

(a) >f:=x->x^2+5 ; >g:=x->(x-6)^2+10 ;

$\text{> solve(\{D(f)(u)=D(g)(v), D(f)(u)*(-u)+f(u)=D(g)(v)*(-v)+g(v)\})}$;

Resposta: $u = \frac{5}{12}$ e $v = \frac{77}{12}$.

(b) $\text{> D(f)(5/12)*(x-5/12)+f(5/12)}$; Equação de r : $y = \frac{5}{6}x + \frac{695}{144}$.

Questão 4

(a) Equação da reta tangente ao gráfico de g em P :

$$y = g'(z)(x - z) + g(z) = -2z(x - z) - z^2 + 6.$$

As coordenadas de $A = (0, a(z))$ satisfazem a equação da reta:

$$a(z) = -2z(0 - z) - z^2 + 6 = z^2 + 6.$$

(b) As coordenadas de $B = (b(z), 0)$ satisfazem a equação da reta:

$$0 = -2z(b(z) - z) - z^2 + 6, \text{ logo } b(z) = \frac{z^2 + 6}{2z}.$$

(c) Como P está no primeiro quadrante, z deve estar entre 0 e a raiz positiva de $g(x)$, assim $\text{Dom}(f) = (0, \sqrt{6})$.

$$f(z) = \frac{a(z) \cdot b(z)}{2} = \frac{(z^2 + 6)^2}{4z}.$$

(d) Vamos estudar o sinal de $f'(z)$:

$\text{> f:=z->(z^2+6)^2/(4*z)}$;

$\text{> solve(D(f)(z)>0)}$; $\text{> solve(D(f)(z)<0)}$;

f é decrescente em $(0, \sqrt{2}]$, pois $f'(z) < 0$ quando $z \in (0, \sqrt{2})$.

f é crescente em $[\sqrt{2}, \sqrt{6})$, pois $f'(z) > 0$ quando $z \in (\sqrt{2}, \sqrt{6})$.

Logo f tem mínimo em $z = \sqrt{2}$.