MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Ia   feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = a$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = a$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = a$ se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

(b) `> f:=x->x^3-180*x^2+8200*x;    g:=x->-128*x^2+7524*x;`

`> solve( f(a)=g(a), D(f)(a)=D(g)(a));`

`> f(26);`

Sim, f e g são tangentes em $x = 26$. O ponto de tangência dos gráficos é $(26, 109096)$.

(c) `> plot([f(x), g(x)], x=22..30);`

Sim. Aparentemente, $f(26) = g(26)$ e $f'(26) = g'(26)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = 26$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(26)*(x-26)+f(26);    s:=x->D(g)(26)*(x-26)+g(26);`

`> plot([r(x), s(x)], x=22..30);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$f'(x) = 3\,\pi\cos(\pi x)$	$P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$
$f''(x) = -3\,\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$	$P''(x) = 2\,a$

Fazendo $f(22,3) = P(22,3)$, $f'(22,3) = P'(22,3)$, $f''(22,3) = P''(22,3)$, temos

$$a = -\frac{3\pi^2}{2}\,\mathrm{sen}\,(\pi\,22,3), \quad b = 3\,\pi\cos(\pi\,22,3), \quad \text{e} \quad c = 3\,\mathrm{sen}\,(\pi\,22,3).$$

Resposta:

$$P(x) = -\frac{3\pi^2}{2}\,\mathrm{sen}\,(\pi\,22,3)\,(x - 22,3)^2 + 3\,\pi\cos(\pi\,22,3)\,(x - 22,3) + 3\,\mathrm{sen}\,(\pi\,22,3).$$

(b)
```
> f:= x-> 3*sin(Pi*x);
> a:= -(3*Pi^2 /2)*sin(Pi*223/10);
> b:= 3*Pi*cos(Pi*223/10) ;
> c:= 3*sin(Pi*223/10);
> P:= x-> c + b*(x-223/10)+ a*(x-223/10)^2;
```

Com "`>plot([P(x), f(x)-0.4, f(x)+0.4], x=21.8..23);`" vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.4=P(x), x=21.8..22.3);
> fsolve(f(x)+0.4=P(x), x=22.3..23);
```

Resposta: $(21,975; 22,769)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->400*cos(x);` `> h:=x->1/10000*(x^6+101*x^5+2550*x^4);`

Fazendo "`>plot([g(x),h(x)], x=-8..7); plot([g(x)-h(x)], x=5.4..6); plot([g(x),h(x)], x=-52..-49);`", vemos 8 soluções no intervalo $(-52, 7)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-52, 7)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Fazendo "`> solve(D(h)(x)>0); solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),400], x=-52..7);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -52]$ e $h(x) > 400$ quando x está em $(-\infty, -52]$. Daí $g(x) \leq 400 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -52]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 400$ quando x está em $[7, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -52] \cup [7, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-400 \leq h(x) \leq 400$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=400); fsolve(h(x)=-400); plot([h(x),400], x=-52..7);`", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -52] \cup [7, \infty)$.

Resposta: 8 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 400 \cos(x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 + 101\, x^5 + 2550\, x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = -51$:

```
> Digits:=14; x[0]:=-51.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = -51$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = -51,314268451888\,, \quad x_2 = -51,256247345453 \quad \text{e} \quad x_3 = -51,254120716465\,.$$

(c.3) Com $x_0 = -51$, podemos escolher o termo $x_5 = -51,254117851770$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Ib   feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = a$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = a$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = a$ se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

(b) `> f:=x->x^3+180*x^2+8200*x;    g:=x->128*x^2+7524*x;`

`> solve( f(a)=g(a), D(f)(a)=D(g)(a));`

`> f(-26);`

Sim, f e g são tangentes em $x = -26$. O ponto de tangência dos gráficos é $(-26, -109096)$.

(c) `> plot([f(x), g(x)], x=-30..-22);`

Sim. Aparentemente, $f(-26) = g(-26)$ e $f'(-26) = g'(-26)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = -26$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(-26)*(x+26)+f(-26);    s:=x->D(g)(-26)*(x+26)+g(-26);`

`> plot([r(x), s(x)], x=-30..-22);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$f'(x) = 3\,\pi\cos(\pi x)$	$P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$
$f''(x) = -3\,\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$	$P''(x) = 2\,a$

Fazendo $f(23,3) = P(23,3)$, $f'(23,3) = P'(23,3)$, $f''(23,3) = P''(23,3)$, temos

$$a = -\frac{3\pi^2}{2}\,\mathrm{sen}\,(\pi\,23,3), \qquad b = 3\,\pi\cos(\pi\,23,3), \quad \text{e} \quad c = 3\ \mathrm{sen}\,(\pi\,23,3).$$

Resposta:

$$P(x) = -\frac{3\pi^2}{2}\,\mathrm{sen}\,(\pi\,23,3)\,(x - 23,3)^2 + 3\,\pi\cos(\pi\,23,3)\,(x - 23,3) + 3\ \mathrm{sen}\,(\pi\,23,3).$$

(b)

```
> f:= x-> 3*sin(Pi*x);
> a:= -(3*Pi^2 /2)*sin(Pi*233/10);
> b:= 3*Pi*cos(Pi*233/10) ;
> c:= 3*sin(Pi*233/10);
> P:= x-> c + b*(x-233/10)+ a*(x-233/10)^2;
```

Com “`>plot([P(x), f(x)-0.4, f(x)+0.4], x=22.8..24);`” vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)+0.4=P(x), x=22.8..23.3);
> fsolve(f(x)-0.4=P(x), x=23.3..24);
```

Resposta: $(22,975; 23,769)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->500*sin(2*x);`   `> h:=x->1/10000*(x^6+101*x^5+2550*x^4);`

Fazendo “`>plot([g(x),h(x)], x=-8..7); plot([g(x),h(x)], x=-52..-49);`”, vemos 10 soluções no intervalo $(-52, 7)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-52, 7)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-500 \leq g(x) \leq 500$. Fazendo “ `> solve(D(h)(x)>0);   solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),500], x=-52..7);`” vemos que h é decrescente em $(-\infty, -52]$ e $h(x) > 500$ quando x está em $(-\infty, -52]$. Daí $g(x) \leq 500 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -52]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 500$ quando x está em $[7, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -52] \cup [7, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-500 \leq g(x) \leq 500$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-500 \leq h(x) \leq 500$. Fazendo “`>fsolve(h(x)=500); fsolve(h(x)=-500); plot([h(x),500], x=-52..7);` ”, vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -52] \cup [7, \infty)$.

Resposta: 10 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 500 \text{ sen}\,(2\,x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 + 101\,x^5 + 2550\,x^4\right)$$

com $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = -50$:

```
> Digits:=14; x[0]:=-50.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = -50$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = -51,066846551886\,,\ \ x_2 = -50,328835421103$ e $x_3 = -50,431872342189\,.$

(c.3) Com $x_0 = -50$, podemos escolher o termo $x_5 = -50,426390505271$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIa feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = a$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = a$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = a$ se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

(b) `> f:=x->x^3-300*x^2+22600*x;    g:=x->-222*x^2+21079*x;`

`> solve( f(a)=g(a), D(f)(a)=D(g)(a));`

`> f(39);`

Sim, f e g são tangentes em $x = 39$. O ponto de tangência dos gráficos é $(39, 484419)$.

(c) `> plot([f(x), g(x)], x=35..43);`

Sim. Aparentemente, $f(39) = g(39)$ e $f'(39) = g'(39)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = 39$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(39)*(x-39)+f(39);    s:=x->D(g)(39)*(x-39)+g(39);`

`> plot([r(x), s(x)], x=35..43);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$f'(x) = 2\,\pi\cos(\pi x)$	$P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$
$f''(x) = -2\,\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$	$P''(x) = 2\,a$

Fazendo $f(24,3) = P(24,3)$, $f'(24,3) = P'(24,3)$, $f''(24,3) = P''(24,3)$, temos

$$a = -\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,24,3), \quad b = 2\,\pi\cos(\pi\,24,3), \quad \text{e} \quad c = 2\ \mathrm{sen}\,(\pi\,24,3).$$

Resposta:

$$P(x) = -\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,24,3)\,(x - 24,3)^2 + 2\,\pi\cos(\pi\,24,3)\,(x - 24,3) + 2\ \mathrm{sen}\,(\pi\,24,3).$$

(b)
```
> f:= x-> 2*sin(Pi*x);
> a:= -(Pi^2)*sin(Pi*243/10);
> b:= 2*Pi*cos(Pi*243/10) ;
> c:= 2*sin(Pi*243/10);
> P:= x-> c + b*(x-243/10)+ a*(x-243/10)^2;
```

Com “`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=23.8..24.9);`” vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=23.8..24.3);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=24.3..24.9);
```

Resposta: $(23,963; 24,809)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

```
> g:=x->420*cos(x);   > h:=x->1/10000*(x^6+104*x^5+2703*x^4);
```

Fazendo "`>plot([g(x),h(x)],x=-8..7); plot([g(x)-h(x)],x=5.6..5.7); plot([g(x),h(x)], x=-54..-49);`", vemos 8 soluções no intervalo $(-54, 7)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-54, 7)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-420 \leq g(x) \leq 420$. Fazendo " `> solve(D(h)(x)>0);  solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),420], x=-54..7);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -54]$ e $h(x) > 420$ quando x está em $(-\infty, -54]$. Daí $g(x) \leq 420 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -54]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 420$ quando x está em $[7, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -54] \cup [7, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-420 \leq g(x) \leq 420$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-420 \leq h(x) \leq 420$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=420); fsolve(h(x)=-420); plot([h(x),420], x=-54..7);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -54] \cup [7, \infty)$.

Resposta: 8 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 420\,\cos(x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 + 104\,x^5 + 2703\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = -53$:

```
> Digits:=14; x[0]:=-53.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = -53$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = -52,778902694885\,,\quad x_2 = -52,754729099632 \quad \text{e} \quad x_3 = -52,754438124242\,.$$

(c.3) Com $x_0 = -53$, podemos escolher o termo $x_5 = -52,754438082195$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIb feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = a$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = a$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = a$ se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

(b) `> f:=x->x^3+300*x^2+22600*x;    g:=x->222*x^2+21079*x;`

`> solve( f(a)=g(a), D(f)(a)=D(g)(a));`

`> f(-39);`

Sim, f e g são tangentes em $x = -39$. O ponto de tangência dos gráficos é $(-39, -484419)$.

(c) `> plot([f(x), g(x)], x=-43..-33);`

Sim. Aparentemente, $f(-39) = g(-39)$ e $f'(-39) = g'(-39)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = -39$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(-39)*(x+39)+f(-39);    s:=x->D(g)(-39)*(x+39)+g(-39);`

`> plot([r(x), s(x)], x=-43..-33);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$f'(x) = 2\,\pi\cos(\pi x)$	$P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$
$f''(x) = -2\,\pi^2\,\text{sen}\,(\pi x)$	$P''(x) = 2\,a$

Fazendo $f(26,3) = P(26,3)$, $f'(26,3) = P'(26,3)$, $f''(26,3) = P''(26,3)$, temos

$$a = -\pi^2\,\text{sen}\,(\pi\,26,3), \quad b = 2\,\pi\cos(\pi\,26,3), \quad \text{e} \quad c = 2\ \text{sen}\,(\pi\,26,3).$$

Resposta:

$$P(x) = -\pi^2\,\text{sen}\,(\pi\,26,3)\,(x - 26,3)^2 + 2\,\pi\cos(\pi\,26,3)\,(x - 26,3) + 2\ \text{sen}\,(\pi\,26,3).$$

(b)
```
> f:= x-> 2*sin(Pi*x);
> a:= -(Pi^2)*sin(Pi*263/10);
> b:= 2*Pi*cos(Pi*263/10) ;
> c:= 2*sin(Pi*263/10);
> P:= x-> c + b*(x-263/10)+ a*(x-263/10)^2;
```

Com "`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=25.8..26.9);`" vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=25.8..26.3);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=26.3..26.9);
```

Resposta: $(25,963; 26,809)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->400*sin(2*x);` `> h:=x->1/10000*(x^6+104*x^5+2703*x^4);`

Fazendo " `> plot([g(x),h(x)], x=-8..7); plot([g(x),h(x)], x=-54..-49);`", vemos 10 soluções no intervalo $(-54,7)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-54,7)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Fazendo " `> solve(D(h)(x)>0); solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),400], x=-54..7);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty,-54]$ e $h(x) > 400$ quando x está em $(-\infty,-54]$. Daí $g(x) \leq 400 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty,-54]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 400$ quando x está em $[7,\infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty,-54] \cup [7,\infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-400 \leq h(x) \leq 400$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=500); fsolve(h(x)=-400); plot([h(x),400], x=-54..7);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty,-54] \cup [7,\infty)$.

Resposta: 10 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 400 \operatorname{sen}(2\,x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 + 104\,x^5 + 2703\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = -53$:

```
> Digits:=14; x[0]:=-53.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = -53$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = -53,136726832437\,, \quad x_2 = -53,125989604913 \quad \text{e} \quad x_3 = -53,125927012555\,.$

(c.3) Com $x_0 = -53$, podemos escolher o termo $x_5 = -53,125927010424$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIIa feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = a$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = a$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = a$ se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

(b) `> f:=x->x^3-300*x^2+22600*x;    g:=x->-222*x^2+21079*x;`

```
> solve( f(a)=g(a), D(f)(a)=D(g)(a));
```

```
> f(39);
```

Sim, f e g são tangentes em $x = 39$. O ponto de tangência dos gráficos é $(39, 484419)$.

(c) `> plot([f(x), g(x)], x=35..43);`

Sim. Aparentemente, $f(39) = g(39)$ e $f'(39) = g'(39)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = 39$.

Outra possibilidade:

```
> r:=x->D(f)(39)*(x-39)+f(39);    s:=x->D(g)(39)*(x-39)+g(39);
```

```
> plot([r(x), s(x)], x=35..43);
```

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$f'(x) = 2\,\pi\cos(\pi x)$	$P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$
$f''(x) = -2\,\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$	$P''(x) = 2\,a$

Fazendo $f(24,3) = P(24,3)$, $f'(24,3) = P'(24,3)$, $f''(24,3) = P''(24,3)$, temos

$$a = -\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,24,3), \quad b = 2\,\pi\cos(\pi\,24,3), \quad \text{e} \quad c = 2\ \mathrm{sen}\,(\pi\,24,3).$$

Resposta:

$$P(x) = -\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,24,3)\,(x - 24,3)^2 + 2\,\pi\cos(\pi\,24,3)\,(x - 24,3) + 2\ \mathrm{sen}\,(\pi\,24,3).$$

(b)

```
> f:= x-> 2*sin(Pi*x);
> a:= -(Pi^2)*sin(Pi*243/10);
> b:= 2*Pi*cos(Pi*243/10) ;
> c:= 2*sin(Pi*243/10);
> P:= x-> c + b*(x-243/10)+ a*(x-243/10)^2;
```

Com “`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=23.8..24.9);`” vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=23.8..24.3);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=24.3..24.9);
```

Resposta: $(23,963; 24,809)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->400*cos(x);` `> h:=x->1/10000*(x^6-101*x^5+2550*x^4);`

Fazendo "`>plot([g(x),h(x)],x=-8..7); plot([g(x)-h(x)],x=-6..-5.4); plot([g(x),h(x)], x=49..52);`", vemos 8 soluções no intervalo $(-8, 52)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-8, 52)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Fazendo "`> solve(D(h)(x)>0); solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),400], x=-8..52);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -8]$ e $h(x) > 400$ quando x está em $(-\infty, -8]$. Daí $g(x) \leq 400 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -8]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 400$ quando x está em $[52, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -8] \cup [52, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-400 \leq h(x) \leq 400$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=400); fsolve(h(x)=-400); plot([h(x),400], x=-8..52);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -8] \cup [52, \infty)$.

Resposta: 8 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 400\cos(x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 - 101\,x^5 + 2550\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = 51$:

```
> Digits:=14; x[0]:=51.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 51$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 51,314268451888\,,\quad x_2 = 51,256247345453 \quad \text{e} \quad x_3 = 51,254120716465\,.$$

(c.3) Com $x_0 = 51$, podemos escolher o termo $x_5 = 51,254117851770$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IIIb   feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = a$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = a$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = a$ se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

(b) `> f:=x->x^3+300*x^2+22600*x;    g:=x->222*x^2+21079*x;`

`> solve( f(a)=g(a), D(f)(a)=D(g)(a));`

`> f(-39);`

Sim, f e g são tangentes em $x = -39$. O ponto de tangência dos gráficos é $(-39, -484419)$.

(c) `> plot([f(x), g(x)], x=-43..-33);`

Sim. Aparentemente, $f(-39) = g(-39)$ e $f'(-39) = g'(-39)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = -39$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(-39)*(x+39)+f(-39);    s:=x->D(g)(-39)*(x+39)+g(-39);`

`> plot([r(x), s(x)], x=-43..-33);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$f'(x) = 2\,\pi\cos(\pi x)$	$P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$
$f''(x) = -2\,\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$	$P''(x) = 2\,a$

Fazendo $f(26,3) = P(26,3)$, $f'(26,3) = P'(26,3)$, $f''(26,3) = P''(26,3)$, temos

$$a = -\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,26,3), \quad b = 2\,\pi\cos(\pi\,26,3), \quad \text{e} \quad c = 2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,26,3).$$

Resposta:

$$P(x) = -\pi^2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,26,3)\,(x - 26,3)^2 + 2\,\pi\cos(\pi\,26,3)\,(x - 26,3) + 2\,\mathrm{sen}\,(\pi\,26,3).$$

(b)

```
> f:= x-> 2*sin(Pi*x);
> a:= -(Pi^2)*sin(Pi*263/10);
> b:= 2*Pi*cos(Pi*263/10) ;
> c:= 2*sin(Pi*263/10);
> P:= x-> c + b*(x-263/10)+ a*(x-263/10)^2;
```

Com "`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=25.8..26.9);`" vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=25.8..26.3);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=26.3..26.9);
```

Resposta: $(25,963; 26,809)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->800*sin(2*x);` `> h:=x->1/10000*(x^6-102*x^5+2600*x^4);`

Fazendo " `> plot([g(x),h(x)], x=-7..8);` `plot([g(x),h(x)], x=49..53);`", vemos 12 soluções no intervalo $(-7, 53)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-7, 53)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-800 \leq g(x) \leq 800$. Fazendo " `> solve(D(h)(x)>0);` `solve(D(h)(x)<0);` `plot([g(x),h(x),800], x=-7..53);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -7]$ e $h(x) > 800$ quando x está em $(-\infty, -7]$. Daí $g(x) \leq 800 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -7]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 800$ quando x está em $[53, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -7] \cup [53, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-800 \leq g(x) \leq 800$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-800 \leq h(x) \leq 800$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=800);` `fsolve(h(x)=-800);` `plot([h(x),800], x=-7..53);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -7] \cup [53, \infty)$.

Resposta: 12 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 800 \text{ sen}\,(2\,x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 - 102\,x^5 + 2600\,x^4\right)$$

com $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = 52$:

```
> Digits:=14; x[0]:=52.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 52$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = 51,913580464186\,,\;\; x_2 = 51,912518071075\;$ e $\;x_3 = 51,912517843949\,.$

(c.3) Com $x_0 = 52$, podemos escolher o termo $x_5 = 51,912517843949$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IVa   feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = 26$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = 26$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = 26$ se $f(26) = g(26)$ e $f'(26) = g'(26)$.

(b)
```
> f:=x->x^3-180*x^2+8200*x;    g:=x->u*x^2+v*x;
> solve( f(26)=g(26), D(f)(26)=D(g)(26));
```

Resposta: $u = -128$ e $v = 7524$.

(c)
```
> u:=-128; v:=7524;
> plot([f(x), g(x)], x=22..30);
```

Sim. Aparentemente, $f(26) = g(26)$ e $f'(26) = g'(26)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = 26$.

Outra possibilidade:

```
> r:=x->D(f)(26)*(x-26)+f(26);    s:=x->D(g)(26)*(x-26)+g(26);
> plot([r(x), s(x)], x=22..30);
```

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad\qquad P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad\qquad P''(x) = 2\,a$$

Fazendo $f(37,5) = P(37,5)$, $f'(37,5) = P'(37,5)$, $f''(37,5) = P''(37,5)$, temos

$$a = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{37,5}{\pi}\right), \quad b = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{37,5}{\pi}\right), \quad \text{e} \quad c = 2\,\cos\left(\frac{37,5}{\pi}\right).$$

Resposta:

$$P(x) = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{37,5}{\pi}\right)(x - 37,5)^2 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{37,5}{\pi}\right)(x - 37,5) + 2\,\cos\left(\frac{37,5}{\pi}\right).$$

(b)

```
> f:= x-> 2*cos(x/Pi);
> a:= -(1/Pi^2)*cos((375/10)/Pi);
> b:= -(2/Pi)*sin((375/10)/Pi) ;
> c:= 2*cos((375/10)/Pi);
> P:= x-> c + b*(x-375/10)+ a*(x-375/10)^2;
```

Com "`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=33..43);`" vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=33..37.5);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=37.5..43);
```

Resposta: $(34,180; 42,502)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->400*cos(x);` `> h:=x->1/10000*(x^6-101*x^5+2550*x^4);`

Fazendo "`>plot([g(x),h(x)],x=-8..7); plot([g(x)-h(x)],x=-6..-5.4); plot([g(x),h(x)], x=49..52);`", vemos 8 soluções no intervalo $(-8, 52)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-8, 52)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Fazendo "`> solve(D(h)(x)>0); solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),400], x=-8..52);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -8]$ e $h(x) > 400$ quando x está em $(-\infty, -8]$. Daí $g(x) \leq 400 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -8]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 400$ quando x está em $[52, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -8] \cup [52, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-400 \leq g(x) \leq 400$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-400 \leq h(x) \leq 400$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=400); fsolve(h(x)=-400); plot([h(x),400], x=-8..52);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -8] \cup [52, \infty)$.

Resposta: 8 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 400 \cos(x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 - 101\,x^5 + 2550\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = 51$:

```
> Digits:=14; x[0]:=51.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 51$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = 51,314268451888\,,\ \ x_2 = 51,256247345453$ e $x_3 = 51,254120716465\,.$

(c.3) Com $x_0 = 51$, podemos escolher o termo $x_5 = 51,254117851770$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – IVb   feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = -26$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = -26$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = -26$ se $f(-26) = g(-26)$ e $f'(-26) = g'(-26)$.

(b) `> f:=x->x^3+180*x^2+8200*x;    g:=x->u*x^2+v*x;`

`> solve( f(-26)=g(-26), D(f)(-26)=D(g)(-26));`

Resposta: $u = 128$ e $v = 7524$.

(c) `> u:=128; v:=7524;`

`> plot([f(x), g(x)], x=-30..-22);`

Sim. Aparentemente, $f(-26) = g(-26)$ e $f'(-26) = g'(-26)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = -26$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(-26)*(x+26)+f(-26);    s:=x->D(g)(-26)*(x+26)+g(-26);`

`> plot([r(x), s(x)], x=-30..-22);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad P''(x) = 2\,a$$

Fazendo $f(17,7) = P(17,7)$, $f'(17,7) = P'(17,7)$, $f''(17,7) = P''(17,7)$, temos

$$a = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{17,7}{\pi}\right), \quad b = -\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{17,7}{\pi}\right), \quad \text{e} \quad c = 2\,\cos\left(\frac{17,7}{\pi}\right).$$

Resposta:

$$P(x) = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{17,7}{\pi}\right)(x - 17,7)^2 - \frac{2}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{17,7}{\pi}\right)(x - 17,7) + 2\,\cos\left(\frac{17,7}{\pi}\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 2*cos(x/Pi);
> a:= -(1/Pi^2)*cos((177/10)/Pi);
> b:= -(2/Pi)*sin((177/10)/Pi) ;
> c:= 2*cos((177/10)/Pi);
> P:= x-> c + b*(x-177/10)+ a*(x-177/10)^2;
```

Com “`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=13..23);`” vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=13..17.7);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=17.7..23);
```

Resposta: $(14,396; 22,455)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

```
> g:=x->800*sin(2*x);   > h:=x->1/10000*(x^6-102*x^5+2600*x^4);
```

Fazendo "`> plot([g(x),h(x)], x=-7..8);   plot([g(x),h(x)], x=49..53);`", vemos 12 soluções no intervalo $(-7, 53)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-7, 53)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-800 \leq g(x) \leq 800$. Fazendo "`> solve(D(h)(x)>0);   solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),800], x=-7..53);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -7]$ e $h(x) > 800$ quando x está em $(-\infty, -7]$. Daí $g(x) \leq 800 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -7]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 800$ quando x está em $[53, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -7] \cup [53, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-800 \leq g(x) \leq 800$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-800 \leq h(x) \leq 800$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=800); fsolve(h(x)=-800); plot([h(x),800], x=-7..53);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -7] \cup [53, \infty)$.

Resposta: 12 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 800 \operatorname{sen}(2\,x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 - 102\,x^5 + 2600\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = 52$:

```
> Digits:=14; x[0]:=52.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 52$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$$x_1 = 51,913580464186\,,\quad x_2 = 51,912518071075 \quad \text{e} \quad x_3 = 51,912517843949\,.$$

(c.3) Com $x_0 = 52$, podemos escolher o termo $x_5 = 51,912517843949$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Va feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = 39$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = 39$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = 39$ se $f(39) = g(39)$ e $f'(39) = g'(39)$.

(b)
```
> f:=x->x^3-300*x^2+22600*x;    g:=x->u*x^2+v*x;
> solve( f(39)=g(39), D(f)(39)=D(g)(39));
```

Resposta: $u = -222$ e $v = 21079$.

(c)
```
> u:=-222; v:=21079;
> plot([f(x), g(x)], x=35..43);
```

Sim. Aparentemente, $f(39) = g(39)$ e $f'(39) = g'(39)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = 39$.

Outra possibilidade:

```
> r:=x->D(f)(39)*(x-39)+f(39);    s:=x->D(g)(39)*(x-39)+g(39);
> plot([r(x), s(x)], x=35..43);
```

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad\qquad P'(x) = b + 2\,a\,(x - x_0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad\qquad P''(x) = 2\,a$$

Fazendo $f(31,6) = P(31,6)$, $f'(31,6) = P'(31,6)$, $f''(31,6) = P''(31,6)$, temos

$$a = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{31,6}{\pi}\right), \quad b = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{31,6}{\pi}\right), \quad \text{e} \quad c = 2\,\cos\left(\frac{31,6}{\pi}\right).$$

Resposta:

$$P(x) = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{31,6}{\pi}\right)(x - 31,6)^2 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{31,6}{\pi}\right)(x - 31,6) + 2\,\cos\left(\frac{31,6}{\pi}\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 2*cos(x/Pi);
> a:= -(1/Pi^2)*cos((316/10)/Pi);
> b:= -(2/Pi)*sin((316/10)/Pi) ;
> c:= 2*cos((316/10)/Pi);
> P:= x-> c + b*(x-316/10)+ a*(x-316/10)^2;
```

Com "`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=25..36);`" vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=25..31.6);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=31.6..36);
```

Resposta: $(26,658; 34,916)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->420*cos(x);` `> h:=x->1/10000*(x^6-104*x^5+2703*x^4);`

Fazendo "`>plot([g(x),h(x)],x=-8..7); plot([g(x)-h(x)],x=-5.7..-5.6); plot([g(x),h(x)], x=50..54);`", vemos 8 soluções no intervalo $(-8, 54)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-8, 54)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-420 \leq g(x) \leq 420$. Fazendo " `> solve(D(h)(x)>0); solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),420], x=-8..54);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -8]$ e $h(x) > 420$ quando x está em $(-\infty, -8]$. Daí $g(x) \leq 420 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -8]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 420$ quando x está em $[54, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -8] \cup [54, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-420 \leq g(x) \leq 420$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-420 \leq h(x) \leq 420$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=420); fsolve(h(x)=-420); plot([h(x),420], x=-8..54);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -8] \cup [54, \infty)$.

Resposta: 8 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 420\,\cos(x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 - 104\,x^5 + 2703\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = 53$:

```
> Digits:=14; x[0]:=53.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 53$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = 52,778902694885\,,\ \ x_2 = 52,754729099632$ e $x_3 = 52,754438124242\,.$

(c.3) Com $x_0 = 53$, podemos escolher o termo $x_5 = 52,754438082195$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G3 – Vb feita em 24 junho de 2013

Questão 1

(a) f e g são tangentes em $x = 39$ se f e g têm a mesma reta tangente em $x = -39$. Ou, equivalentemente, f e g são tangentes em $x = -39$ se $f(-39) = g(-39)$ e $f'(-39) = g'(-39)$.

(b) `> f:=x->x^3+300*x^2+22600*x;    g:=x->u*x^2+v*x;`

`> solve( f(-39)=g(-39), D(f)(-39)=D(g)(-39));`

Resposta: $u = 222$ e $v = 21079$.

(c) `> u:=222; v:=21079;`

`> plot([f(x), g(x)], x=-43..-33);`

Sim. Aparentemente, $f(-39) = g(-39)$ e $f'(-39) = g'(-39)$.

Ou

Não. os gráficos não se tangenciam e/ou não se encontram em $x = -39$.

Outra possibilidade:

`> r:=x->D(f)(-39)*(x+39)+f(-39);    s:=x->D(g)(-39)*(x+39)+g(-39);`

`> plot([r(x), s(x)], x=-43..-33);`

Sim. Aparentemente, as retas tangentes são iguais.

Ou

Não. As retas tangentes são diferentes.

Questão 2

Seja $P(x) = a\,(x-x_0)^2 + b\,(x-x_0) + c$.

(a) Derivadas de f e P necessárias:

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad\qquad P'(x) = b + 2\,a\,(x-x_0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad\qquad P''(x) = 2\,a$$

Fazendo $f(11,8) = P(11,8)$, $f'(11,8) = P'(11,8)$, $f''(11,8) = P''(11,8)$, temos

$$a = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{11,8}{\pi}\right), \quad b = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{11,8}{\pi}\right), \quad \text{e} \quad c = 2\cos\left(\frac{11,8}{\pi}\right).$$

Resposta:

$$P(x) = -\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{11,8}{\pi}\right)(x-11,8)^2 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{11,8}{\pi}\right)(x-11,8) + 2\cos\left(\frac{11,8}{\pi}\right).$$

(b)
```
> f:= x-> 2*cos(x/Pi);
> a:= -(1/Pi^2)*cos((118/10)/Pi);
> b:= -(2/Pi)*sin((118/10)/Pi) ;
> c:= 2*cos((118/10)/Pi);
> P:= x-> c + b*(x-118/10)+ a*(x-118/10)^2;
```

Com “`>plot([P(x), f(x)-0.3, f(x)+0.3], x=5..16);`” vemos o intervalo solução:

```
> fsolve(f(x)-0.3=P(x), x=5..11.8);
> fsolve(f(x)+0.3=P(x), x=11.8..16);
```

Resposta: $(6,461; 15,133)$.

Questão 3

(a) Definimos as funções:

`> g:=x->300*sin(3*x);   > h:=x->1/10000*(x^6-104*x^5+2703*x^4);`

Fazendo " `> plot([g(x),h(x)], x=-7..8);  plot([g(x),h(x)], x=49..54);`", vemos 12 soluções no intervalo $(-7, 54)$.

Não existe solução da equação fora do intervalo $(-7, 54)$. Justificativa 1: $g(x)$ tem sempre a limitação $-300 \leq g(x) \leq 300$. Fazendo " `> solve(D(h)(x)>0);  solve(D(h)(x)<0); plot([g(x),h(x),300], x=-7..54);`" vemos que h é decrescente em $(-\infty, -7]$ e $h(x) > 300$ quando x está em $(-\infty, -7]$. Daí $g(x) \leq 300 < h(x)$ e logo $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -7]$. Analogamente, h é crescente e $h(x) > 300$ quando x está em $[54, \infty)$. Daí $h(x) \neq g(x)$ quando x está em $(-\infty, -7] \cup [54, \infty)$. Justificativa 2: $g(x)$ tem sempre a limitação $-300 \leq g(x) \leq 300$. Para que os gráficos de g e h se encontrem, x deve ser tal que $-300 \leq h(x) \leq 300$. Fazendo "`>fsolve(h(x)=300); fsolve(h(x)=-300); plot([h(x),300], x=-7..54);` ", vemos que as soluções que procuramos não estão em $(-\infty, -7] \cup [54, \infty)$.

Resposta: 12 soluções.

(b) Como o Método de Newton nos dá aproximações de soluções de equação do tipo $f(x) = 0$, tomamos

$$f(x) = 300 \operatorname{sen}(3\,x) - \frac{1}{10000}\left(x^6 - 104\,x^5 + 2703\,x^4\right)$$

com $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(c.1) `> f:=x->g(x)-h(x);`

Pela resposta do item (a), podemos escolher $x_0 = 53$:

```
> Digits:=14; x[0]:=53.0; for n from 0 to 8 do x[n+1]:=x[n]-f(x[n])/D(f)(x[n]);
end do;
```

(c.2) Com $x_0 = 53$, os três primeiros termos da sequência obtida no item (c.1) são

$x_1 = 53,149419349212$, $x_2 = 53,130681970770$ e $x_3 = 53,130407667959$.

(c.3) Com $x_0 = 53$, podemos escolher o termo $x_5 = 53,130407608097$, pois, na sequência de aproximações de α obtida no item (c.1), x_5 e x_6 possuem o mesmo trucamento na sétima casa decimal.