MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G4 feito em 02 de julho de 2013 versão I

1. Considere $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = -x^2 - 2x + 8$.
$f(1) = -2$ e $g(1) = 5$ $\Longrightarrow$ $6 > g(1) > f(1)$. Logo $(1, 6) \in A$.

2. Pelo Método de Newton, se x_0 é o primeiro termo da sequência, então x_1 é solução de

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Substituindo $x_1 = 3$, $f(x_0) = 5 - {x_0}^2$ e $f'(x_0) = -2\,x_0$ na equação acima, obtemos:

$$-6\,x_0 = -2\,{x_0}^2 - 5 + {x_0}^2 \quad \Leftrightarrow \quad {x_0}^2 - 6\,x_0 + 5 = 0.$$

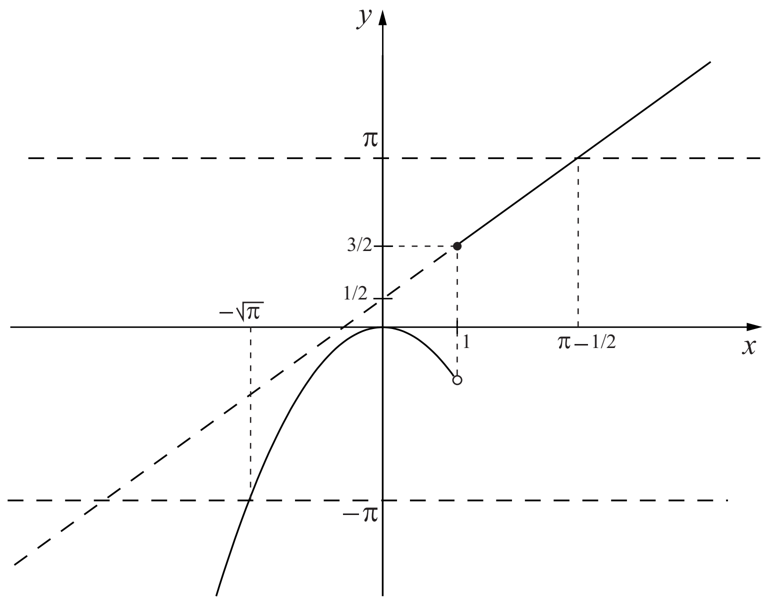
Resposta: $x_0 = 1$ ou $x_0 = 5$.

3. (a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ já que:
- $x < 1$ e $-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $x \geq 1$ e $x + 1/2 = 0 \Rightarrow$ impossível

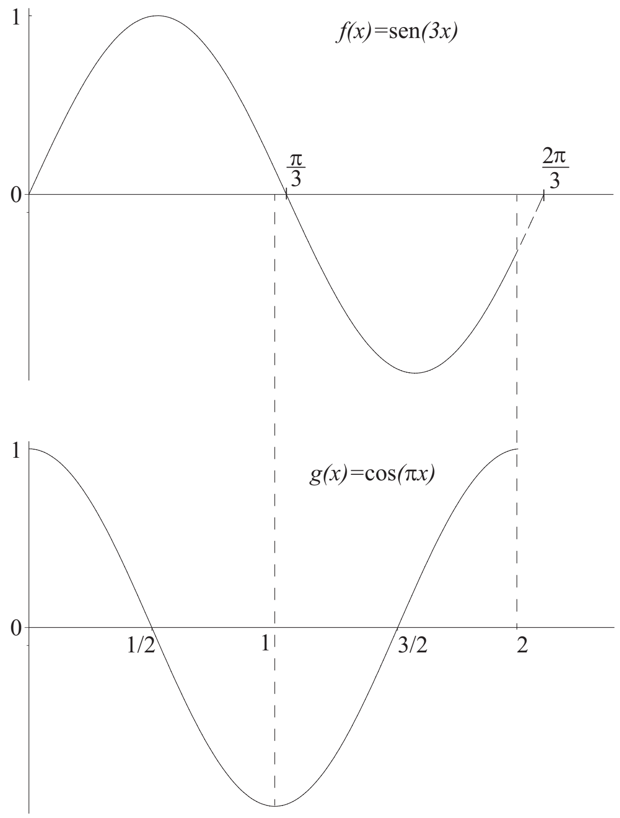
(b) $f(x) = -\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\pi}$ já que:
- $x < 1$ e $-x^2 = -\pi \Rightarrow x = -\sqrt{\pi}$
- $x \geq 1$ e $x + 1/2 = -\pi \Rightarrow$ impossível

(c) $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1) - \{0\}$ já que:
- $x < 1$ e $-x^2 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x \neq 0$
- $x \geq 1$ e $x + 1/2 < 0 \Rightarrow$ impossível

(d) $f(x) > \pi \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\pi - \frac{1}{2}, \infty)$ já que:
- $x < 1$ e $-x^2 > \pi \Rightarrow$ impossível
- $x \geq 1$ e $x + 1/2 > \pi \Rightarrow x > \pi - \frac{1}{2}$



4. Sejam $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$ e $g(x) = \cos(\pi x)$.
Podemos estudar os sinais de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[0, 2]$, a partir do esboço de seus gráficos neste intervalo.



A tabela abaixo mostra os sinais de $f(x)$, $g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ para $x \in [0, 2]$.

$0 < x < 1/2$	$1/2 < x < \pi/3$	$\pi/3 < x < 3/2$	$3/2 < x < 2$	Sinal de:
$+$	$+$	$-$	$-$	$f(x)$
$+$	$-$	$-$	$+$	$g(x)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Daí, concluímos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(\pi x)} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

5. **(a)** Falso. Em $x = -3$, f assume máximo local pois:
   - f é decrescente em $[-3, -2]$, já que $f'(x) < 0$ se $x \in [-3, -2)$; e
   - $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

   (b) Verdadeiro. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

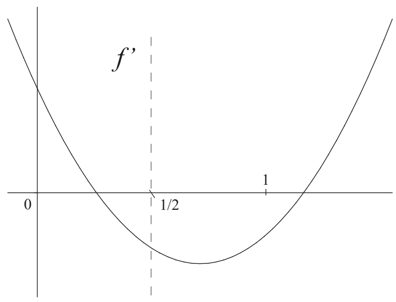
   (c) Falso. $f''(-\frac{1}{2}) > 0$ pois a reta tangente ao gráfico de f' em $x = -\frac{1}{2}$ tem inclinação positiva.

   (d) Falso. A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem inclinação positiva, já que $f'(1) > 0$.

6. (a) Domínio: $x > 0$, pois x é a medida do lado do quadrado e a altura da caixa. É necessário que $3 - 2\,x > 0$ e $1 - 2\,x > 0$. Daí $\text{Dom}(f) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

   $f(x) =$ área da base x altura $= (3 - 2\,x)(1 - 2\,x)\,x = 3\,x - 8\,x^2 + 4\,x^3$.

   (b) Vamos estudar o sinal de $f'(x) = 3 - 16\,x + 12\,x^2$ com $x \in \text{Dom}(f) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$:



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16 - \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 12} = \frac{16 - \sqrt{16(16 - 3 \cdot 3)}}{2 \cdot 12} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{6}$$

f é crescente em $\left(0, \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}\right]$ e decrescente em $\left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$, logo f tem máximo em $x = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G4 feito em 02 de julho de 2013 versão II

1. Considere $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = -x^2 - 2x + 8$.
   $f(1) = -2$ e $g(1) = 5$ $\Longrightarrow$ $6 > g(1) > f(1)$. Logo $(1, 6) \in D$.

2. Pelo Método de Newton, se x_0 é o primeiro termo da sequência, então x_1 é solução de

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Substituindo $x_1 = 2$, $f(x_0) = 3 - {x_0}^2$ e $f'(x_0) = -2\,x_0$ na equação acima, obtemos:

$$-4\,x_0 = -2\,{x_0}^2 - 3 + {x_0}^2 \quad \Leftrightarrow \quad {x_0}^2 - 4\,x_0 + 3 = 0.$$

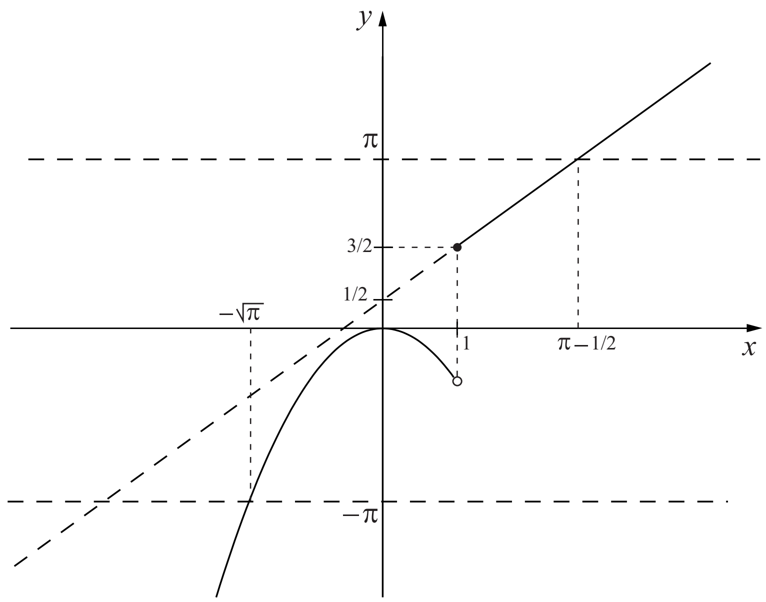
Resposta: $x_0 = 1$ ou $x_0 = 3$.

3. (a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ já que:
   - $x < 1$ e $-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
   - $x \geq 1$ e $x + 1/2 = 0 \Rightarrow$ impossível

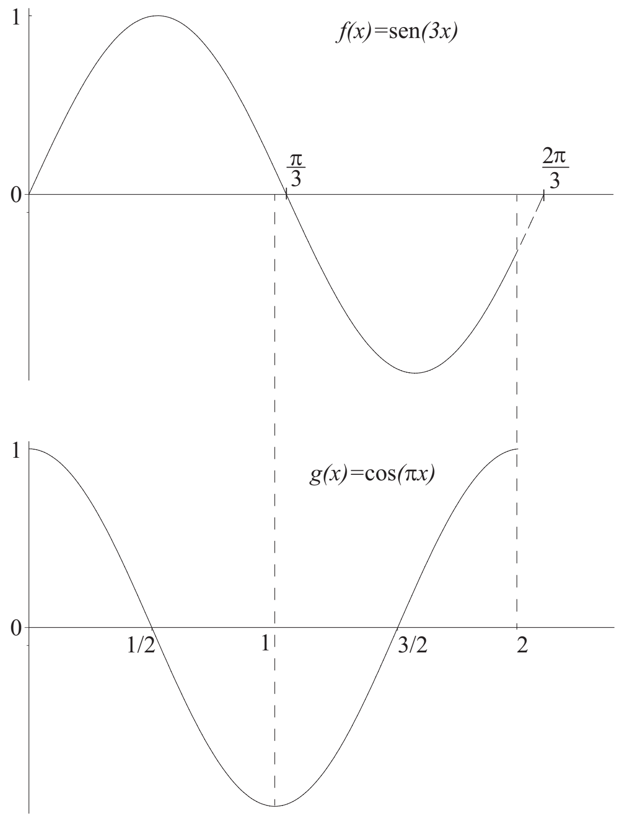
   (b) $f(x) = -\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\pi}$ já que:
   - $x < 1$ e $-x^2 = -\pi \Rightarrow x = -\sqrt{\pi}$
   - $x \geq 1$ e $x + 1/2 = -\pi \Rightarrow$ impossível

   (c) $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1) - \{0\}$ já que:
   - $x < 1$ e $-x^2 < 0 \Rightarrow x < 1$ e $x \neq 0$
   - $x \geq 1$ e $x + 1/2 < 0 \Rightarrow$ impossível

   (d) $f(x) > \pi \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\pi - \frac{1}{2}, \infty)$ já que:
   - $x < 1$ e $-x^2 > \pi \Rightarrow$ impossível
   - $x \geq 1$ e $x + 1/2 > \pi \Rightarrow x > \pi - \frac{1}{2}$



4. Sejam $f(x) = \text{sen}\,(3x)$ e $g(x) = \cos\,(\pi x)$.
Podemos estudar os sinais de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[0, 2]$, a partir do esboço de seus gráficos neste intervalo.



A tabela abaixo mostra os sinais de $f(x)$, $g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ para $x \in [0, 2]$.

$0 < x < 1/2$	$1/2 < x < \pi/3$	$\pi/3 < x < 3/2$	$3/2 < x < 2$	Sinal de:
$+$	$+$	$-$	$-$	$f(x)$
$+$	$-$	$-$	$+$	$g(x)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Daí, concluímos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{sen}\,(3x)}{\cos\,(\pi x)} \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]$$

5. **(a)** Falso. Em $x = -3$, f assume mínimo local pois:
   - f é crescente em $[-3, -2]$, já que $f'(x) > 0$ se $x \in [-3, -2)$; e
   - $x = -3$ é um extremo do domínio de f.

   (b) Verdadeiro. A figura mostra que em $x = 0$ ocorre a única mudança de crescimento de f' e, portanto, a única mudança de concavidade do gráfico de f.

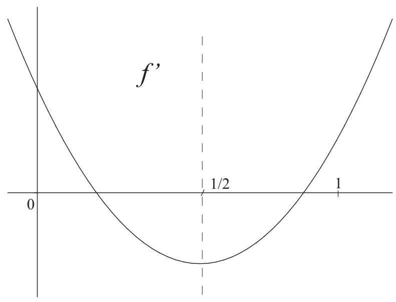
   (c) Falso. $f''(-\frac{1}{2}) < 0$ pois a reta tangente ao gráfico de f' em $x = -\frac{1}{2}$ tem inclinação negativa.

   (d) Falso. A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem inclinação negativa, já que $f'(1) < 0$.

6. (a) Domínio: $x > 0$, pois x é a medida do lado do quadrado e a altura da caixa. É necessário que $2 - 2\,x > 0$ e $1 - 2\,x > 0$. Daí $\text{Dom}(f) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

   $f(x) =$ área da base x altura $= (2 - 2\,x)(1 - 2\,x)\,x = 2\,x - 6\,x^2 + 4\,x^3$.

   (b) Vamos estudar o sinal de $f'(x) = 2 - 12\,x + 12\,x^2$ com $x \in \text{Dom}(f) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$:



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 - \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 12} = \frac{12 - \sqrt{12(12-8)}}{2 \cdot 12} = \frac{12 - \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

f é crescente em $\left(0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right]$ e decrescente em $\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$, logo f tem máximo em $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.