Gabarito da P2, 2012.2

Questão 1

item (a): Pelo Teorema de Green,

$$I = \oint_C [\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)]\, dx + x^2\cos(xy)\, dy = \iint_R \big(\partial_x Q - \partial_y P\big) dx\, dy,$$

onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ e

$$\begin{cases} \partial_x Q = 2x\cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy) \\ \\ \partial_y P = x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy). \end{cases}$$

Logo, $\partial_x Q - \partial_y P = 0$, e portanto $I = 0$.

item (b): Pelo Teorema de Green,

$$J = \oint_C y^3\, dx - x^3 dy \; = \iint_R \big(\partial_x Q - \partial_y P) dx\, dy = -3 \iint_R (x^2 + y^2) dx\, dy,$$

onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x - 1 \le y \le -x + 1\}$. Logo,

$$\begin{aligned} J = -3 \int_0^1 \big[\int_{x-1}^{-x+1} (x^2 + y^2) dy\big] dx &= -3 \int_0^1 \big[x^2 y + \frac{y^3}{3}\big]_{x-1}^{-x+1} dx \\ = -6 \int_0^1 [-x^3 + x^2 - \frac{(x-1)^3}{3}] dx &= -6[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{12}]_0^1 \\ &= -6(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}) = -6(1/6) = -1. \end{aligned}$$

(OBS: alternativamente, o cálculo poderia ser feito diretamente pela definição).

Questão 2

item (a): Calculamos o rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 & x^2z - 4xy & x^2y + 2xz - 2 \end{bmatrix} = (0, 0, 0),$$

logo, o campo é conservativo.

Queremos achar um campo escalar φ tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ (já sabemos que tal φ existe). Ou seja, temos de resolver o sistema:

$$\begin{cases} \partial_x\varphi = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 \\ \partial_y\varphi = x^2z - 4xy \\ \partial_z\varphi = x^2y + 2xz - 2 \end{cases}$$

Integrando a 1a. equação em relação a x obtemos:

$$\varphi(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + A(y, z),$$

para certa função $A(y, z)$ a determinar.

Substituindo na 2a equação, obtemos:

$$x^2z - 4xy\partial_y A(y, z) = x^2z - 4xy \Rightarrow \partial_y A(y, z) = 0,$$

ou seja, $A(y, z) = h(z)$, para certa função $h(z)$. Substituindo $\varphi(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + h(z)$ na 3a. eq. obtemos:

$$x^2y + 2xz + h'(z) = x^2y + 2xz - 2 \Rightarrow h'(z) = -2 \Rightarrow h(z) = -2z + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Assim, um potencial para $\mathbf{F}$ é:

$$\varphi(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z.$$

item (b):

Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos:

$$\int_C (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 1 - 0 = 1.$$

Questão 3

item(a): **VERDADEIRO**.

Temos, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$,

$$\begin{cases} \partial_x f = \partial_x (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\dfrac{x}{r^3} \\ \partial_y f = \partial_y (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\dfrac{y}{r^3} \\ \partial_z f = \partial_z (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$

logo $\nabla f = \nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

item(b): **VERDADEIRO**.

Temos

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{c}) = \varphi \nabla \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \nabla \varphi = \mathbf{c} \cdot \nabla \varphi,$$

uma vez que $\nabla \mathbf{c} = \mathbf{0}$.