Notas de Aula – Disciplina FIS1061 – 2013-2

Prof. Waldemar Monteiro Silva Jr. - PUC-Rio – CTC – Departamento de Física

Índice:

Cap 2: Polarização da Onda EM - Aula 1 - 02/09/2013.

Livro texto: Fundamentos de Física – Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. - vol 4 – 9ª ed – Ed. LTC – Rio de Janeiro - 2012

Referências Adicionais:
1-Nussenzveig, H.M. Curso de Física Básica, vol 4, Ed. Edgard Blücher, 2002, S. Paulo, pág. 144.
2-Alonso, M. & Finn, E. J. – Física Um Curso Universitário, vol 2, 10ª. Reimpressão, Ed. Edgard Blücher, 2004, S. Paulo, pág. 793.
3-Luiz, A. M. – Exercícios de Física, vol 4, Ed. LTC, Rio Janeiro, ..., pág. 192.
4-Jenkins, F. A. & White, H. E. – Fundamentals of Optics, 4th. Edition, Ed. McGraw-Hill, N.Y., 2001, p. 488
5-Ditchburn, R. W., Light, Dover Pub., N.Y., 1961

1-Introdução

Uma onda eletromagnética se propaga no vácuo e em vários meios gasosos, líquidos e sólidos. Nos gases e líquidos as moléculas estão orientadas ao acaso. A dependência direcional da polarizabilidade para a velocidade da onda não produz nenhum efeito e o meio se comporta macroscopicamente como isotrópico.

Nos sólidos cristalinos, as moléculas podem estar orientadas em direções definidas. Então, as propriedades dos cristais dependem em geral da direção em que estão sendo medidas. Portanto, dependendo de sua estrutura molecular e de seus arranjos nos sólidos cristalinos, estes podem se comportar como meios isotrópicos ou anisotrópicos.

Se uma onda eletromagnética em se propaga em meio anisotrópico, a velocidade da propagação pode depender da direção da polarização da onda e da direção da propagação no meio. Sabe-se que a polarizabilidade de várias moléculas não é a mesma em todas as direções.

2-Características principais da Polarização da Luz:

A polarização da onda eletromagnética (EM) é representada pela vibração do vetor do campo elétrico $\vec{E}$ no plano perpendicular à propagação da onda. Algumas propriedades da polarização da onda EM estão resumidas abaixo:

1 –Toda onda EM transversal pode ser polarizada.

2 – A luz polarizada pode ser produzida por diversos fenômenos. Entre esses temos:

a – Reflexão.
b – Transmissão através de uma pilha de placas.
c – Dicroísmo.
d – Dupla refração.
e – Espalhamento.

a – Reflexão – Onda incidente no ângulo de Brewster tem componente do campo elétrico paralelo ao plano de incidência anulado. Portanto a onda refletida fica polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência.

b – Refração ou Transmissão através de uma pilha de placas – Para onda incidente no ângulo de Brewster a onda transmitida (refratada) tem parte de sua componente perpendicular diminuída em relação à onda incidente, pois a onda refletida possui componente perpendicular ao plano de incidência. A onda incidente cede totalmente sua componente paralela a esse plano para a onda transmitida pois a onda refletida não possui componente paralela a esse plano. Se tivermos onda incidente com ângulo de Brewster sobre uma pilha de placas transparentes, as ondas transmitidas terão componentes perpendiculares a esse plano cada vez menores. Dessa forma ao longo de aproximadamente 20 placas a onda transmitida estará quase totalmente polarizada na direção paralela ao plano de incidência.

c – Dicroísmo – Determinados materiais (por exemplo, minerais como a turmalina e compostos orgânicos como a herapatita) apresentam o fenômeno da absorção de uma das componentes do campo elétrico. Esses materiais absorvem completamente uma das componentes do campo elétrico e transmitem a outra componente com pouquíssima perda. Com isso um raio luminoso incidente sobre um material dicroico emerge linearmente polarizado.

d – Dupla refração – Cristais de Calcita ($CaCO_3$) e Quartzo (SiO_2) apresentam o fenômeno da dupla refração ou Birrefringência. Quando uma feixe de luz não polarizada incide sobre um desses cristais surgem dois raios luminosos refratados polarizados perpendicularmente ente si. Um deles obedece a Lei de Snell-Descartes (chamado Raio Ordinário) e o outro não obedece (chamado Raio Extraordinário). Esses raios ficam distanciados ligeiramente um do outro. Pode-se separar esses dois raios e obter um raio polarizado em uma direção previamente escolhida.

e – Espalhamento – A luz vinda de uma direção incide sobre partículas ultramicroscópicas em suspensão em um meio. Essa luz é espalhada em todas as direções. Os raios espalhados que saem na direção perpendicular à direção da luz incidente são polarizados parcialmente na outra direção perpendicular à direção incidente.

3 – Do ponto de vista da onda EM esta pode apresentar os seguintes estados de polarização:

- não polarizada.
- polarizada linearmente.
- polarizada circularmente.
- polarizada elipticamente.
- polarizada com não polarizada.

4 – Qualquer que seja o estado de polarização de uma onda EM incidente sobre uma placa polaróide, a onda EM emergente é sempre linearmente polarizada com o campo $\vec{E}$ paralelo a uma direção característica do polaróide.

5 – As placas polarizadoras mais usadas são as lâminas de polaroide, em forma de placas circulares (discos de pequena espessura). Estas foram inventadas por E.H. LAND em 1932.

6 - Há duas leis simples sobre a polarização na Óptica:

(a) Lei de Malus → E. Malus – 1808.
(b) Lei de Brewster → D. Brewster – 1815.

(a) Lei de Malus:

Uma onda luminosa (feixe de luz) incide sobre um polarizador com intensidade I_0. Essa luz atravessa um polarizador P_1 que possui um eixo característico E_1. A Luz sai Linearmente Polarizada ao longo dessa direção característica E_1 com intensidade I_1. Faz-se esta luz linearmente polarizada incidir sobre um segundo polarizador P_2 (chamado de analisador) que possui eixo característico E_2 fazendo ângulo θ com eixo característico E_1 do primeiro polarizador. A luz emergente do segundo polarizador tem intensidade I_2.

A relação entre I_2 e I_1 é chamada de Lei de Malus, sendo representada por

$$I_2 = I_1.\cos^2\theta \qquad (2.1)$$

Pode-se verificar essa lei usando dois polarizadores constituídos por duas lâminas de turmalina (dicroísmo) ou por duas lâminas polaróides.

(b) Lei de Brewster:

Envia-se uma onda EM (feixe de luz) sobre uma superfície que é a interface entre dois meios dielétricos denominados i (onde está a luz incidente), com índice de refração n_i, e t (onde está a luz transmitida), com índice de refração n_t. O feixe incidente sofre reflexão e transmissão nessa superfície. O feixe REFLETIDO pode ficar LINEARMENTE POLARIZADO na DIREÇÃO PERPENDICULAR AO PLANO DE INCIDÊNCIA se o feixe incidente fizer um ângulo crítico θ_B com a direção normal à interface. O feixe TRANSMITIDO fica LINEARMENTE POLARIZADO na DIREÇÃO PARALELA e na DIREÇÃO PERPENDICULAR AO PLANO DE INCIDÊNCIA. A Lei de Brewster comporta duas relações. Uma é a relação entre esse ângulo e os índices de refração desses dois meios. A outra é a relação entre os ângulos de incidência e de transmissão, dadas por:

$$tg\,\theta_B = \frac{n_t}{n_i} \quad ; \quad \theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \qquad (2.2a,b)$$

Como consequência temos também $\theta_r + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, pois $\theta_r = \theta_i$.

Exercícios:

(1) Considere a luz do sol com feixe luminoso (onda EM) incidindo do ar (índice de refração $n_i = 1{,}0$) sobre uma placa de vidro (índice de refração $n_t = 1{,}5$). Encontre o ângulo de Brewster para esse feixe luminoso. Obtenha o ângulo da onda refratada (transmitida) e verifique pela Lei de Snell.

RESP: $tg\ \theta_B = \frac{n_t}{n_i} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$ → $\theta_B \cong 57°$. Como $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ →
$\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_B = 90 - 57$ → $\theta_t \cong 33°$.

Usando a lei de Snell temos
$n_i.sen\ \theta_i = n_t.sen\ \theta_t$ → $1.sen(57°) = 1{,}5.sen\ \theta_t$ → $sen\ \theta_t = \frac{0{,}8387}{1{,}5} = 0{,}559$ → $\theta_t \cong 34°$.

(2) Refaça o exercício anterior para incidência do meio i para os meios t, abaixo:
Água ($n_{água} = 4/3$) → Quartzo ($n_{quartzo} = 1{,}51$)
Álcool ($n_{álcool} = 1{,}36$) → Vidro ($n_{vidro-especial} = 1{,}64$)
Gelo ($n_{gelo} = 1{,}31$) → Diamante ($n_{diamante} = 2{,}417$).

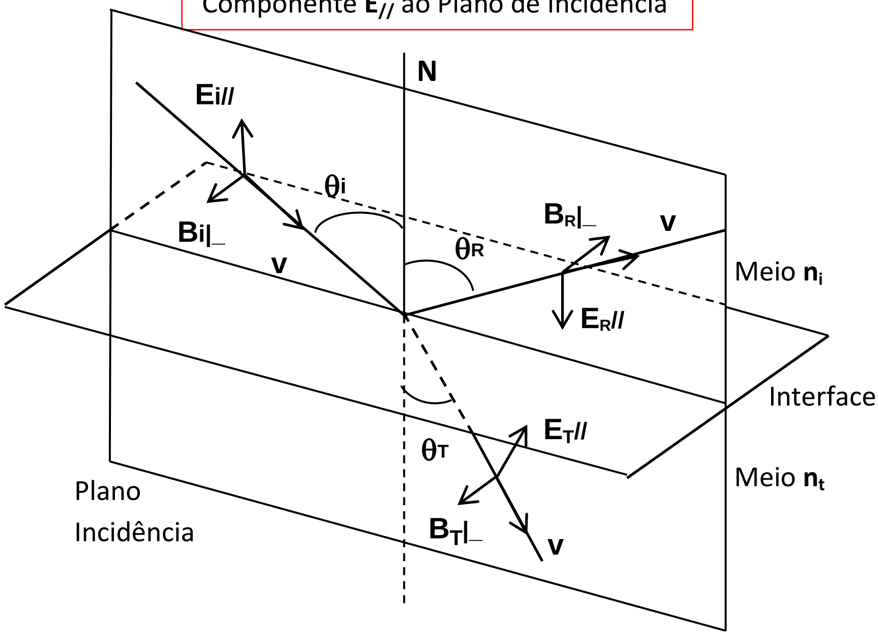
(3) Considere o ângulo $\theta = 30°$ entre as direções características de dois polaróides. Admita a intensidade da onda EM incidente como I_1. Calcule a razão entre a intensidade I_2 da onda emergente do segundo polaróide e a I_1 incidente nesse polaróide.

RESP $I_2 = I_1.\cos^2\theta$ → $\frac{I_2}{I_1} = \cos^2\theta = (\cos 30°)^2 = (0{,}866)^2$ → $\frac{I_2}{I_1} = 0{,}75.$

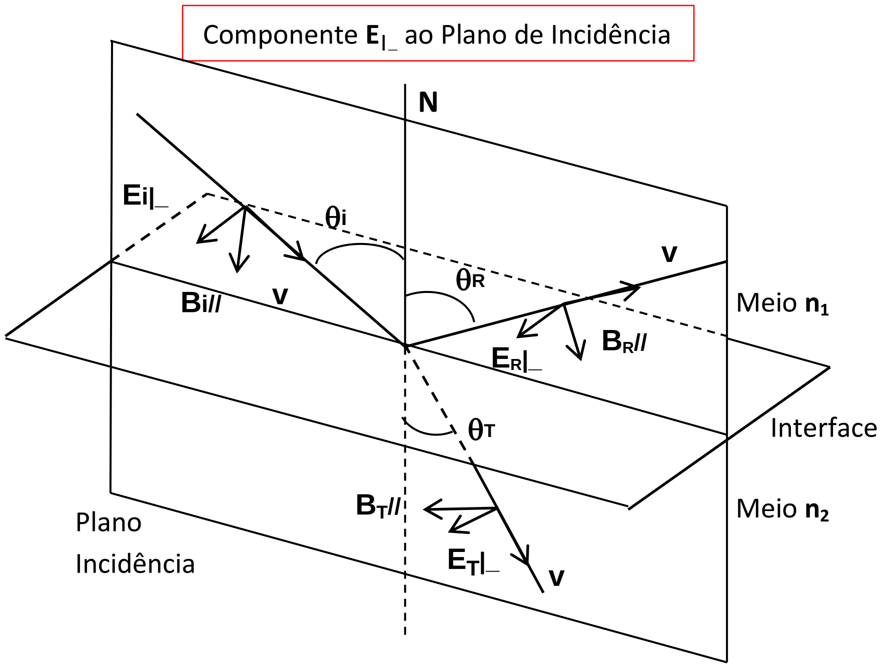
<u>3-Obtenção das propriedades da Polarização da Luz pela lei de Brewster.</u>

Obteremos agora as duas equações que compõem a Lei de Brewster. Considere a situação do campo elétrico $\vec{E}$ da onda EM incidente sobre a interface entre dois meios dielétricos com índices de refração n_i e n_t. Representamos a componente paralela $\vec{E}_\parallel$ ao plano de incidência na figura abaixo.

Componente $E_{//}$ ao Plano de Incidência



Representamos a componente perpendicular ao plano de incidência $\vec{E}_\perp$na figura que se segue.



Utilizando as condições de contorno na interface para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com suas componentes paralelas e perpendiculares ao plano de incidência, pode-se obter os coeficientes de Amplitude de Reflexão $R_\parallel$ e $R_\perp$ (razão entre as componentes da onda refletida e suas correspondentes da onda incidente) e os coeficientes de Amplitude de Transmissão $T_\parallel$ e $T_\perp$ (razão entre as componentes da onda transmitida (refratada) e as componentes da onda incidente). Essas relações são conhecidas como Fórmulas de Fresnel.

$$R_\parallel = \frac{E_{r-\parallel}}{E_{i-\parallel}} = \frac{n_i.cos\theta_t - n_t.cos\theta_i}{n_i.cos\theta_t + n_t.cos\theta_i} \tag{3.1}$$

$$R_\perp = \frac{E_{r-\perp}}{E_{i-\perp}} = \frac{n_i.cos\theta_i - n_t.cos\theta_t}{n_i.cos\theta_i + n_t.cos\theta_t} \tag{3.2}$$

$$T_\parallel = \frac{E_{t-\parallel}}{E_{i-\parallel}} = \frac{2n_i.cos\theta_i}{n_i.cos\theta_t + n_t.cos\theta_i} \tag{3.3}$$

$$T_\perp = \frac{E_{t-\perp}}{E_{i-\perp}} = \frac{2n_i.cos\theta_i}{n_i.cos\theta_i + n_t.cos\theta_t} \tag{3.4}$$

DEDUÇÃO DE ALGUNS RESULTADOS:

I - Relação $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$.

Considere o caso importante em que $R_\parallel = 0$, equação (3.1) acima.

Isto exige que a componente paralela (ao plano de incidência) do campo elétrico refletido $E_{r-\parallel}$ se anule ou seja a onda eletromagnética refletida estará polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência. Tal fato ocorrerá se

$$n_i . cos\theta_t = n_t . cos\theta_i \quad (3.5)$$

O ângulo de incidência θ_i é chamado de Ângulo de Brewster e simbolizado por θ_B: $\theta_i = \theta_B$. Nesse caso a expressão anterior fica na forma $n_i . cos\theta_t = n_t . cos\theta_B$.

Podemos combinar essa expressão com a Lei de Snell-Descartes ($n_i . sen\theta_B = n_t . sen\theta_t$) para obter $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$.

De (3.5) vem $cos\theta_B = \frac{n_i . cos\theta_t}{n_t}$ e da lei de Snell vem $sen\theta_B = \frac{n_t . sen\theta_t}{n_i}$. Multiplicando essas expressões vem $sen\theta_B cos\theta_B = \frac{n_t . sen\theta_t}{n_i} . \frac{n_i . cos\theta_t}{n_t} = sen\theta_t cos\theta_t$, o que leva a $\frac{1}{2} sen2\theta_B = \frac{1}{2} sen2\theta_t$. Temos algumas soluções para essa equação:

(a) $2\theta_B = 2\theta_t$ que somente é consistente com a Lei de Snell-Descartes para $\theta_B = \theta_t = 0$, ou seja incidência perpendicular à interface.

(b) $2\theta_B = \pi - 2\theta_t$ ou $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$.

Como vale a lei da reflexão, $\theta_B = \theta_r$. Temos também $\theta_r + \theta_t = \frac{\pi}{2}$. Resumindo

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \theta_r + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (3.6)$$

Isto mostra que os feixes luminosos incidente e refratado são perpendiculares entre si (fazem ângulo de $90°$) entre si. Mostra também que os ângulos refletido e refratado são perpendiculares entre si (fazem ângulo de $90°$).

II - Relação $tg\ \theta_B = \frac{n_t}{n_i}$.

Temos a relação $tg\ \theta_i = \frac{sen\theta_i}{cos\theta_i}$. O numerador vem da lei de Snell e o denominador vem da fórmula (3.5). Obtemos $tg\ \theta_i = \frac{sen\theta_i}{cos\theta_i} = \frac{\frac{n_t . sen\theta_t}{n_i}}{\frac{n_i . cos\theta_t}{n_t}} = \frac{n_t}{n_i} . \frac{n_t . sen\theta_t}{n_i . cos\theta_t}$. Usando a lei de Snell no numerador, chega-se a $tg\ \theta_i = \frac{n_t}{n_i} . \frac{n_i . sen\theta_i}{n_i . cos\theta_t} = \frac{n_t}{n_i} . \frac{sen\theta_i}{cos\theta_t}$. Lembrando que se $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, temos $sen\theta_i = cos\theta_t$ → $tg\ \theta_i = \frac{n_t}{n_i}$, portanto

$$tg\ \theta_B = \frac{n_t}{n_i}.$$

Resumindo, para incidência em ângulo de Brewster temos:

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \theta_r + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad tg\ \theta_B = \frac{n_t}{n_i}$$

$$E_{r-\parallel} = 0, \quad E_{r-\perp} \neq 0 \quad ; \quad E_{t-\parallel} \neq 0, \quad E_{t-\perp} \neq 0.$$

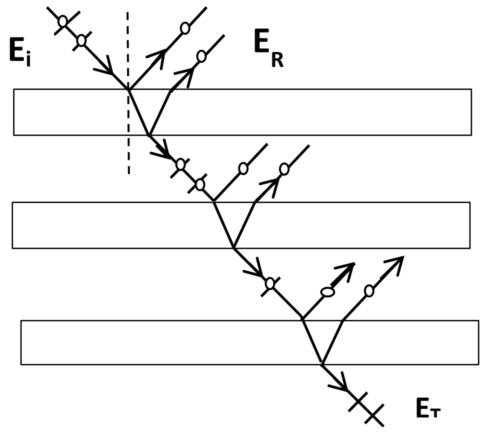
Polarização por Transmissão

Do ponto de vista prático se prefere obter luz polarizada através de processos de transmissão de um feixe de luz incidente em uma pilha de placas transparentes com feixe incidente no ângulo de Brewster.

Quando se estuda as intensidades dos feixes luminosos incidente, refletido e transmitido em meios transparentes homogêneos e isotrópicos, observa-se que em geral a luz refletida possui baixa intensidade. A maior parte da energia fica no feixe transmitido.

No caso da incidência em ângulo de Brewster vista acima, isso tem bastante importância. A energia contida no feixe incidente divide-se nas duas componentes $E_{i-\parallel}$ e $E_{i-\perp}$. Uma parte pequena da componente $E_{i-\perp}$ fica no feixe refletido. A maior parte fica no feixe transmitido. Note que a componente $E_{i-\parallel}$ teve sua energia integralmente passada para o feixe transmitido, pois o feixe refletido não possui essa componente, já que $E_{r-\parallel} = 0$. Vide figura.

O feixe transmitido possui mais energia na componente paralela ao plano de incidência $E_{t-\parallel}$ do que na componente perpendicular ao plano de incidência $E_{t-\perp}$, como se percebe da argumentação acima. Isso leva a propormos a incidência de um feixe luminoso para atravessar uma pilha de placas transparentes de modo a obtermos feixes transmitidos com componentes $E_{t-\perp}$ cada vez menores até que não reste quase nada dessa componente. Desse modo a componente $E_{t-\parallel}$ sobrevive integral no feixe transmitido. Ao final do processo o feixe transmitido estará linearmente polarizado na direção paralela ao plano de incidência.



É possível definir a fração de polarização (PP) de um feixe luminoso pela fórmula

$$PP = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel} \qquad (3.7)$$

Em 1850 Provostaye e Desains obtiveram uma expressão para a fração de polarização de um feixe que atravessou m placas com mesmo índice de refração n:

$$PP = \frac{m}{m + (\frac{2.n}{1-n^2})^2} \qquad (3.7a)$$

Exemplo: Considere 8 placas de vidro com índice de refração n = 1,5 atravessadas por um feixe luminoso em incidência de Brewster. Calcule a fração de polarização do feixe transmitido.

RESP: $PP = \frac{m}{m + (\frac{2.n}{1-n^2})^2} = \frac{8}{8 + (\frac{2x1,5}{1-(1,5)^2})^2}$ → $PP = 0,581$.

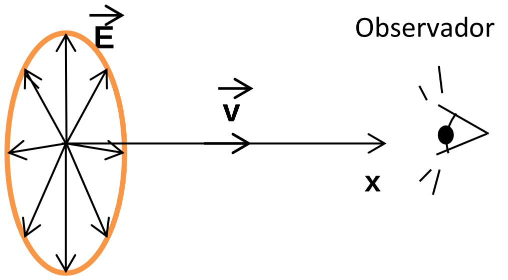
<u>4-Representação da Polarização da Onda Eletromagnética.</u>

Faz-se a representação da polarização da onda EM através de figuras com os vetores elétricos, seu sentido de giro, direção e sentido do vetor velocidade e as funções da onda. Coloca-se um observador olhando de frente para o vetor da velocidade da onda. Existem formas mais gerais de representação da polarização da onda EM através de matrizes, as quais serão aprendidas em outro curso.

Usualmente temos 7 casos principais. Aqui entretanto somente trabalharemos com 4 desses casos: Não polarizada, Linearmente polarizada, Circularmente polarizada e Elipticamente polarizada. Os outros casos são combinações desses.

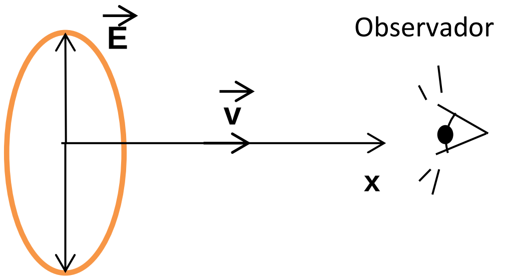
1º. Caso: Não Polarizada.

O vetor campo elétrico $\vec{E}$ oscila aleatoriamente no plano perpendicular à direção de propagação da onda EM. Pode crescer ou diminuir ou ainda alterar sua direção de oscilação de modo aleatório.



2º. Caso: Linearmente Polarizada.

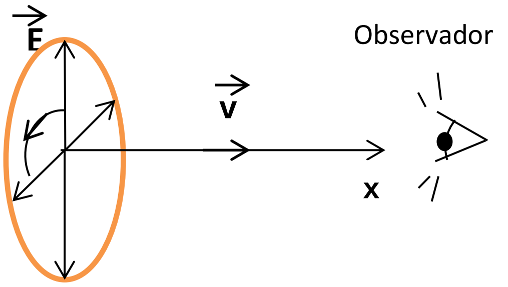
O vetor campo elétrico $\vec{E}$ oscila em uma só direção no plano perpendicular à direção de propagação da onda EM. Pode crescer ou diminuir.



3º. Caso: Circularmente Polarizada.
Esse caso comporta duas possibilidades: à esquerda e à direita.

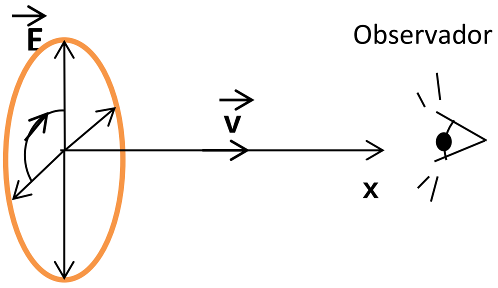
3º.(a) Circularmente Polarizada à Esquerda:

O vetor campo elétrico $\vec{E}$ oscila no plano perpendicular à direção de propagação da onda EM. Porém sua direção de oscilação gira no sentido anti-horário quando vista pelo observador. A extremidade do vetor campo elétrico $\vec{E}$ decreve uma circunferência. O seu módulo permanece constante.



3º.(b) Circularmente Polarizada à Direita:

O vetor campo elétrico $\vec{E}$ oscila no plano perpendicular à direção de propagação da onda EM. Porém sua direção de oscilação gira no sentido horário, quando vista pelo observador. A extremidade do vetor campo elétrico $\vec{E}$ decreve uma circunferência. O seu módulo permanece constante.

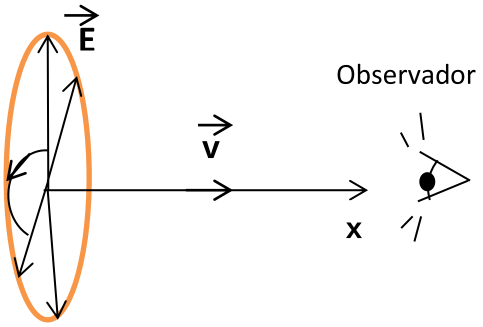


4º. Caso: Elipticamente Polarizada.

Esse caso comporta duas possibilidades: à esquerda e à direita.

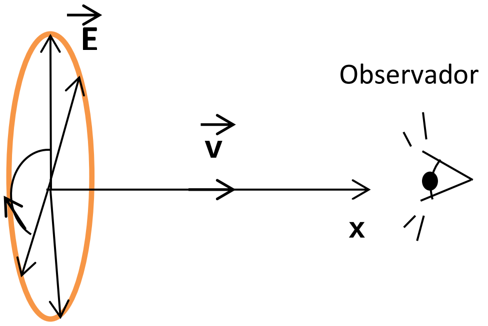
4º.(a) Elipticamente Polarizada à Esquerda:

O vetor campo elétrico $\vec{E}$ oscila no plano perpendicular à direção de propagação da onda EM. Porém sua direção de oscilação gira no sentido anti-horário quando vista pelo observador. A extremidade do vetor campo elétrico $\vec{E}$ decreve uma elipse. O seu módulo varia entre um máximo e um mínimo.



4º.(a) Elipticamente Polarizada à Direita:

O vetor campo elétrico $\vec{E}$ oscila no plano perpendicular à direção de propagação da onda EM. Porém sua direção de oscilação gira no sentido horário quando vista pelo observador. A extremidade do vetor campo elétrico $\vec{E}$ decreve uma elipse. O seu módulo varia entre um máximo e um mínimo.



Equações que representam vetorialmente a polarização da onda EM.

1-Mostremos que o vetor mais geral possível para o vetor $\vec{\boldsymbol{E}}$ é acompanhado pelo vetor $\vec{\boldsymbol{B}}$ mais geral possível para a onda plana que se propaga na direção do eixo x. Consideremos $\vec{\boldsymbol{E}}$ com duas componentes perpendiculares $\vec{\boldsymbol{E}}_y$ e $\vec{\boldsymbol{E}}_z$ dadas por

$$E_y(x,t) = E_{ym}.sen(kx - \omega t)$$

$$E_z(x,t) = E_{zm}.sen(kx - \omega t),$$

de forma que $\vec{E} = E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$. Obtemos $\vec{B}$ pela equação $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2}x\vec{E}$, onde $v = c$.

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & E_y & E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2}\{\hat{i}(0-0) + \hat{j}(0 - vE_z) + \hat{k}\left(vE_y - 0\right) \rightarrow \vec{B} = \frac{-v}{c^2}E_z\hat{j} + \frac{v}{c^2}E_y\hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{-v}{c^2}E_{zm}.sen(kx - \omega t)\hat{j} + \frac{v}{c^2}E_{ym}.sen(kx - \omega t)\hat{k}.$$

Definindo $B_{zm} = \frac{1}{c}E_{ym}$ e $B_{ym} = -\frac{1}{c}E_{zm}$ temos

$\vec{B} = B_{ym}.sen(kx - \omega t)\hat{j} + B_{zm}.sen(kx - \omega t)\hat{k}$ ou seja $\vec{B} = B_y(x,t)\hat{j} + B_z(x,t)\hat{k}$.

2-Mostremos agora que a expressão mais geral entre as componentes do vetor $E_y(x,t)$ e $E_z(x,t)$ é a equação geral da elipse cujos semi-eixos não coincidem com os eixos coordenados x e y. Consideremos existir uma defasagem angular δ entre essas duas componentes:

$$E_y(x,t) = E_{ym}.sen\alpha$$

$E_z(x,t) = E_{zm}.sen(\alpha + \delta)$, tal que $\alpha = (kx - \omega t)$.

Admitamos um plano perpendicular à direção e propagação da onda, caracterizado pelo valor $x = 0$, sem perda de generalidade. Nesse caso vem

$$E_y(x,t) = E_{ym}.sen(-\omega t)$$

$$E_z(x,t) = E_{zm}.sen(-\omega t + \delta) = E_{zm}\{sen(-\omega t).cos\delta + \cos(-\omega t).sen\delta\}.$$

Essas equações mostram que o vetor $\vec{\boldsymbol{E}}$ tem sua extremidade variando com o tempo t, descrevendo uma curva que respeita as condições $\left|E_y\right| \leq \left|E_{ym}\right|$ e $|E_z| \leq |E_{zm}|$, ou seja essa curva está contida em um retângulo de lados E_{ym} e E_{zm}.

Para eliminar a dependência em ωt, faremos

$$\frac{E_y}{E_{ym}} = sen(-\omega t); \quad \frac{E_z}{E_{zm}} = sen(-\omega t).cos\delta + \cos(-\omega t).sen\delta.$$

Lembrando que $\cos(-\omega t) = \sqrt{1-\frac{E_y{}^2}{E_{ym}{}^2}}$ e substituindo a primeira equação na segunda, vem $\frac{E_z}{E_{zm}} = \frac{E_y}{E_{ym}}.cos\delta + \sqrt{1-\frac{E_y{}^2}{E_{ym}{}^2}}.sen\delta \rightarrow \frac{E_z}{E_{zm}} - \frac{E_y}{E_{ym}}.cos\delta = \sqrt{1-\frac{E_y{}^2}{E_{ym}{}^2}}.sen\delta.$

Elevando ao quadrado obtemos

$(\frac{E_z}{E_{zm}})^2 + (\frac{E_y}{E_{ym}})^2.(cos\delta)^2 - 2.\frac{E_z}{E_{zm}}.\frac{E_y}{E_{ym}}.cos\delta = (1-\frac{E_y{}^2}{E_{ym}{}^2}).(sen\delta)^2 \quad \rightarrow$

$$(\frac{E_z}{E_{zm}})^2 + (\frac{E_y}{E_{ym}})^2 - 2.\frac{E_z}{E_{zm}}.\frac{E_y}{E_{ym}}.cos\delta = (sen\delta)^2.$$

Essa é a equação da elipse cujos semi-eixos não coincidem com os eixos coordenados x e y.
Examinemos casos particulares:

<u>1-Polarização Linear</u>: Se $\delta = n\pi$; com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \rightarrow$ $sen\delta = 0; cos\delta = \pm 1 \rightarrow$

$(\frac{E_z}{E_{zm}})^2 + (\frac{E_y}{E_{ym}})^2 \pm 2.\frac{E_z}{E_{zm}}.\frac{E_y}{E_{ym}} = 0 \rightarrow (\frac{E_z}{E_{zm}} \pm \frac{E_y}{E_{ym}})^2 = 0 \rightarrow \frac{E_z}{E_{zm}} \pm \frac{E_y}{E_{ym}} = 0 \rightarrow$

$E_z = \pm\left(\frac{E_{zm}}{E_{ym}}\right).E_y$ $\rightarrow$ que é uma função linear de E_z em função de E_y.
CONCLUSÃO: <u>Essa é uma onda EM linearmente polarizada</u>.

<u>2-Polarização Circular</u>: Se $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$; com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ e $E_{zm} = E_{ym} \equiv E_m \rightarrow$ $sen(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$; $\cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow$

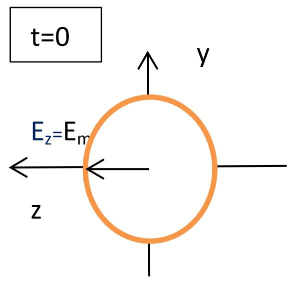
$(\frac{E_z}{E_m})^2 + (\frac{E_y}{E_m})^2 - 2.\frac{E_z}{E_m}.\frac{E_y}{E_m}.0 = 1 \rightarrow (\frac{E_z}{E_m})^2 + (\frac{E_y}{E_m})^2 = 1 \rightarrow E_z{}^2 + E_y{}^2 = E_m{}^2$, que é a equação de uma circunferência. Portanto essa <u>é uma onda polarizada circularmente</u>.

Pode-se distinguir se a polarização é à esquerda ou à direita. Vejamos:

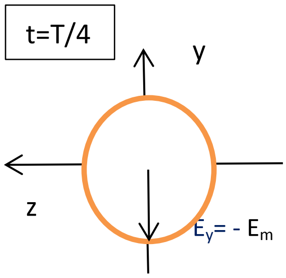
<u>POLARIZAÇÃO À ESQUERDA</u>
Seja $\delta = +\frac{\pi}{2}$. Teremos onda circularmente polarizada à esquerda.
Para saber isso, investiguemos o vetor elétrico no plano $x = 0$ para os instantes $t = 0$ e $t = \frac{T}{4}$, isto é após um quarto de volta. Observaremos se as componentes indicam giro para a esquerda ou para a direita.

$E_y(0,t) = E_m.sen(-\omega t)$; $E_z(0,t) = E_m.sen\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$

<u>Para $t = 0$:</u> $E_y(0,0) = E_m.sen(-\omega.0) = 0$;
$E_z(0,0) = E_m.sen\left(+\frac{\pi}{2}\right) = E_m.$



Para $t = \frac{T}{4}$: $E_y\left(0,\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\omega.\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -E_m$;
$E_z\left(0,\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\omega\frac{T}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = E_m.sen\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$



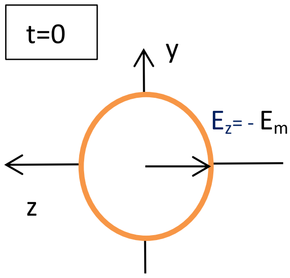
Vemos que transcorrido um quarto do tempo, o vetor Elétrico $\vec{E}$ teve um giro anti-horário:

CONCLUSÃO: Essa onda é circularmente polarizada à esquerda.

POLARIZAÇÃO À DIREITA

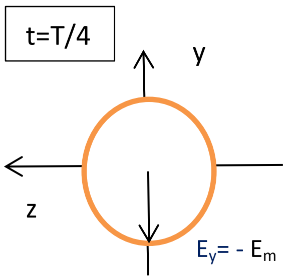
Seja $\delta = +\frac{3\pi}{2}$. Teremos onda circularmente polarizada à direita.
Para saber isso, investiguemos o vetor elétrico no plano $x = 0$ para os instantes $t = 0$ e $t = \frac{T}{4}$, isto é após um quarto de volta. Observaremos se as componentes indicam giro para a esquerda ou para a direita.

$E_y(0,t) = E_m.sen(-\omega t)$; $E_z(0,t) = E_m.sen\left(-\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$.



Para $t = 0$: $E_y(0{,}0) = E_m.sen(-\omega.0) = 0$;
$E_z(0{,}0) = E_m.sen\left(-\omega.0 + \frac{3\pi}{2}\right) = -E_m.$

Para $t = \frac{T}{4}$: $E_y\left(0,\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\omega.\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -E_m$;
$E_z\left(0,\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\omega\frac{T}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) = E_m.sen\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$



Vemos que transcorrido um quarto do tempo, o vetor Elétrico $\vec{E}$ teve um giro horário:

CONCLUSÃO: Essa onda é circularmente polarizada à direita.

3-Polarização Elíptica:

Temos várias possibilidades: $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$; $\pi < \delta < \frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$.
$(\frac{E_z}{E_{zm}})^2 + (\frac{E_y}{E_{ym}})^2 - 2.\frac{E_z}{E_{zm}}.\frac{E_y}{E_{ym}}.cos\delta = (sen\delta)^2$ que é a equação de uma elipse. Portanto essa é uma onda polarizada elipticamente.

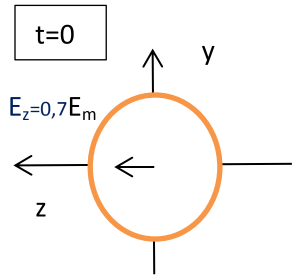
Pode-se distinguir se a polarização é à esquerda ou à direita. Vejamos:

POLARIZAÇÃO À ESQUERDA

Seja $\delta = +\frac{\pi}{4}$ e $E_{ym} = 2E_{zm}$. Teremos onda elipticamente polarizada à esquerda. Giro anti-horário. Para saber isso, investiguemos o vetor elétrico no plano $x = 0$ para os instantes $t = 0$ e $t = \frac{T}{4}$, isto é após um quarto de volta. Observaremos se as componentes indicam giro para a esquerda ou para a direita.

$E_y(0,t) = E_{ym}.sen(-\omega t)$; $E_z(0,t) = E_{zm}.sen\left(-\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.

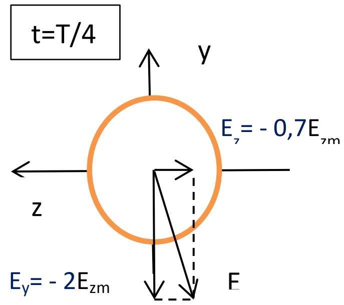
Para $t = 0$: $E_y(0{,}0) = E_m.sen(-\omega.0) = 0$;
$E_z(0{,}0) = E_{zm}.sen\left(-\omega.0 + \frac{\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}E_{zm} = +0{,}7E_{zm}$.



Para $t = \frac{T}{4}$: $E_y\left(0,\frac{T}{4}\right) = E_{ym}.sen\left(-\omega.\frac{T}{4}\right) = E_m.sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -E_{ym} = -2E_{zm}$;
$E_z\left(0,\frac{T}{4}\right) = E_{zm}.sen\left(-\omega\frac{T}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = E_{zm}.sen\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}7E_{zm}$.

Vemos que transcorrido um quarto do tempo, o vetor Elétrico $\vec{E}$ teve um giro anti-horário:

CONCLUSÃO: <u>Essa onda é elipticamente polarizada à esquerda.</u>



<u>POLARIZAÇÃO À DIREITA</u>
Se fizermos $\delta = -\frac{\pi}{4}$ e $E_{ym} \neq E_{zm}$. Teremos onda elipticamente polarizada à direita. Giro horário. CONCLUSÃO: <u>Essa onda é elipticamente polarizada à direita.</u>

<u>Fica como exercício para o estudante.</u>

<u>4-Lâminas de Meia Onda e Um Quarto de Onda.</u>