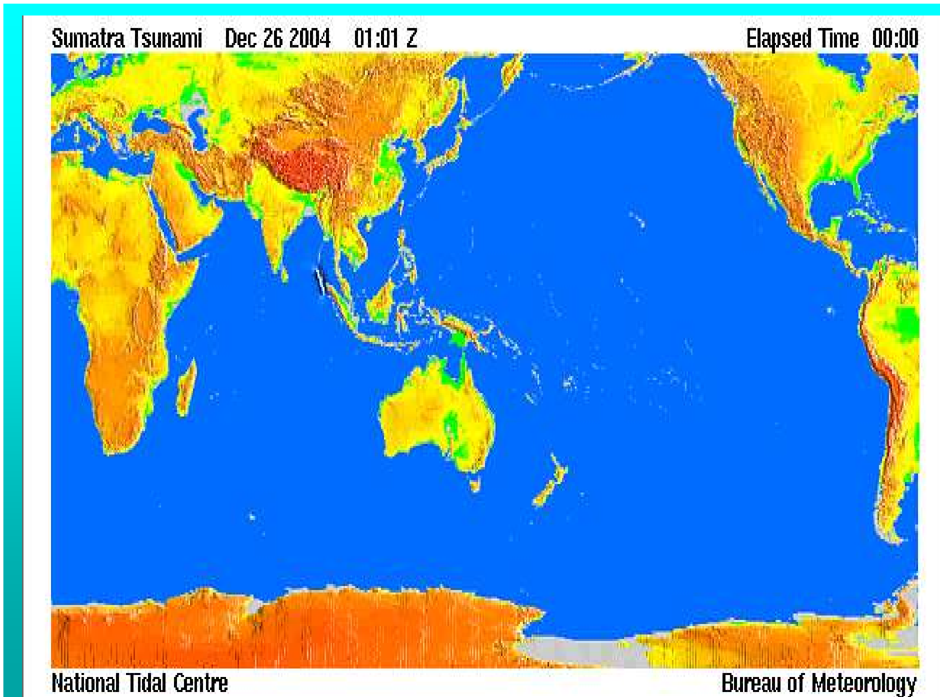
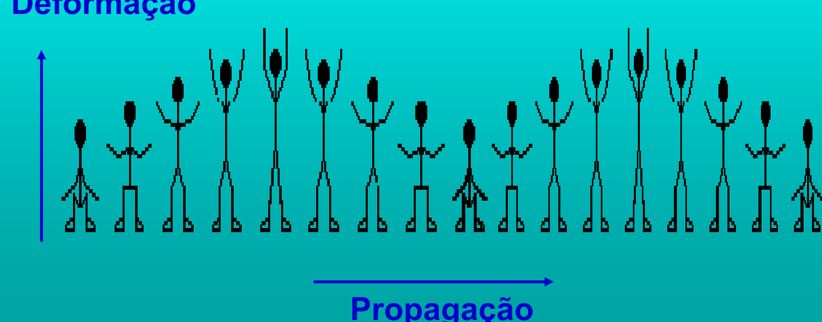
16

ONDAS


Sumatra Tsunami Dec 26 2004 01:01 Z
Elapsed Time 00:00
National Tidal Centre
Bureau of Meteorology

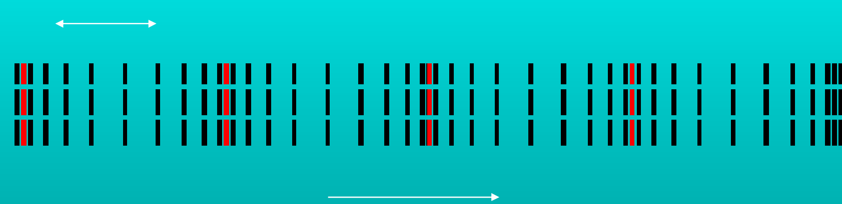
16.3 Uma onda se caracteriza como sendo qualquer perturbação que se propaga no espaço.

Onda transversal: a deformação é transversal à direção de propagação.



Onda longitudinal: a deformação é paralela à direção de propagação.

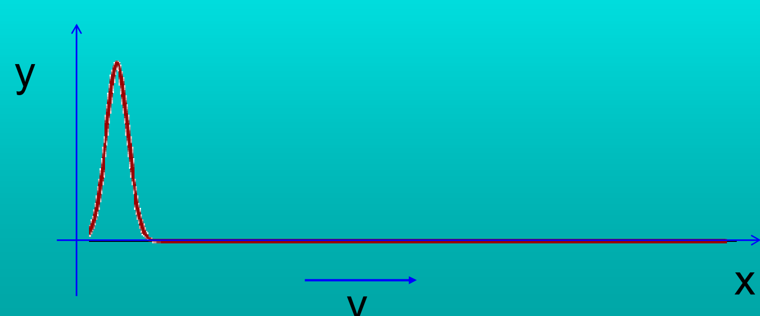
Deformação



Propagação

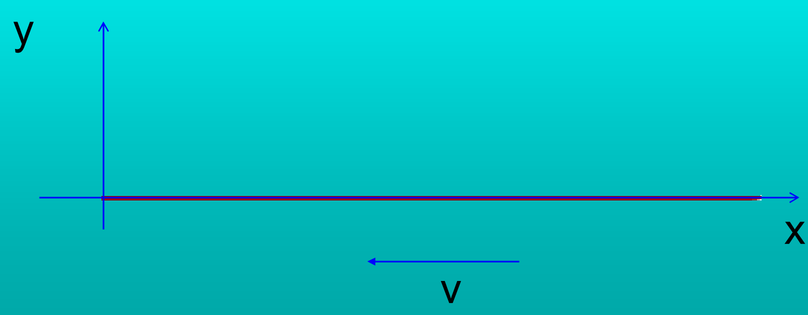
A descrição matemática
de um pulso de onda que caminha
para **a direita** com **velocidade constante v**,
é feita por uma função

$$y(x-vt)$$



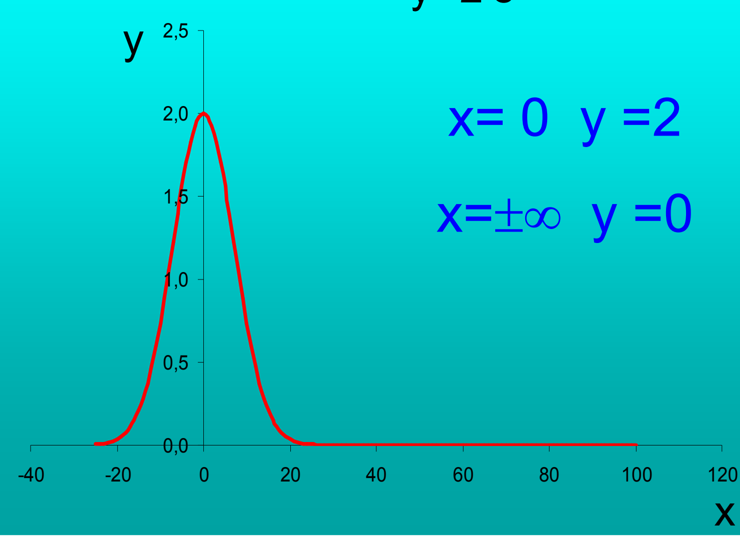
Quando o pulso caminha para a esquerda com velocidade v, é descrito por uma função

$$y(x+vt).$$



Exemplo: seja a função gaussiana centrada em x=0.

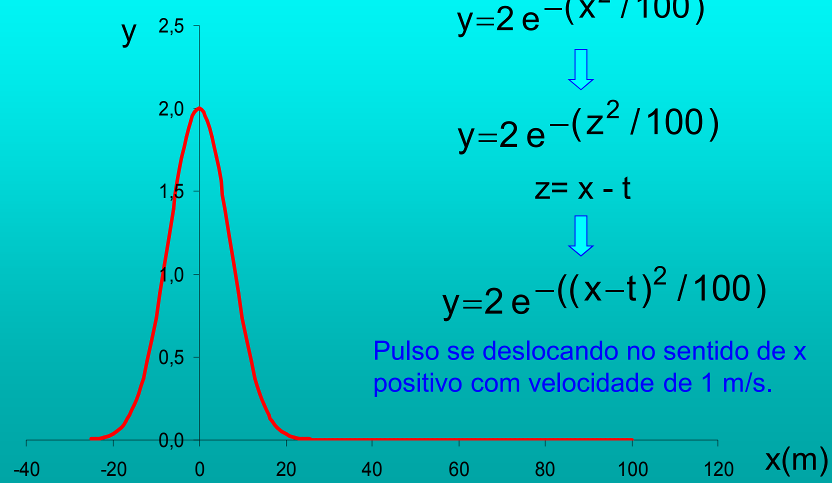
$$y = 2\, e^{-(x^2/100)}$$



$x = 0 \quad y = 2$

$x = \pm\infty \quad y = 0$

Considere a variável z = x-vt substituindo x. Esta variável faz com que a gaussiana se desloque com velocidade **v** no sentido x positivo. Supondo v=1m/s, z assume o valor z= x-t,



$$y = 2\,e^{-(x^2/100)}$$

$$\Downarrow$$

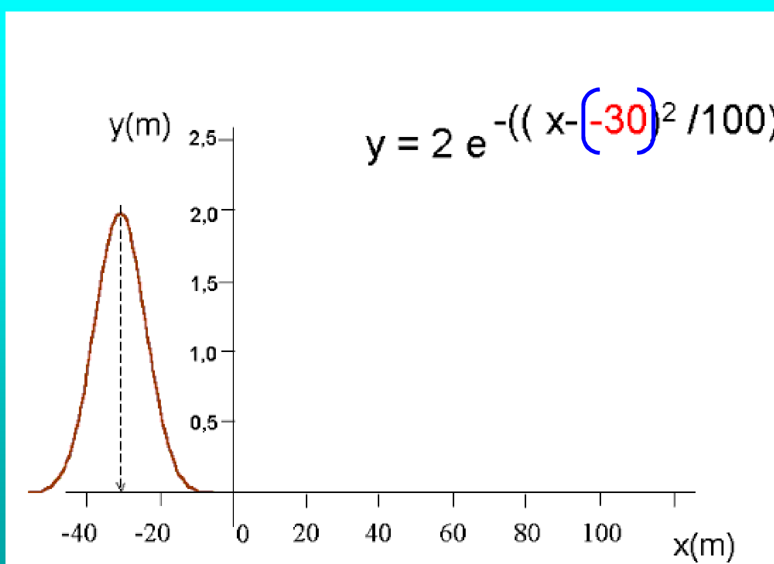
$$y = 2\,e^{-(z^2/100)}$$

z= x - t

$$\Downarrow$$

$$y = 2\,e^{-((x-t)^2/100)}$$

Pulso se deslocando no sentido de x positivo com velocidade de 1 m/s.



Considere z = x+vt. Agora a variável z faz com que o pulso se desloque com velocidade v no sentido x negativo. Supondo v=1m/s, z assume o valor z= x+t,

$$y = 2\,e^{-(x^2/100)}$$

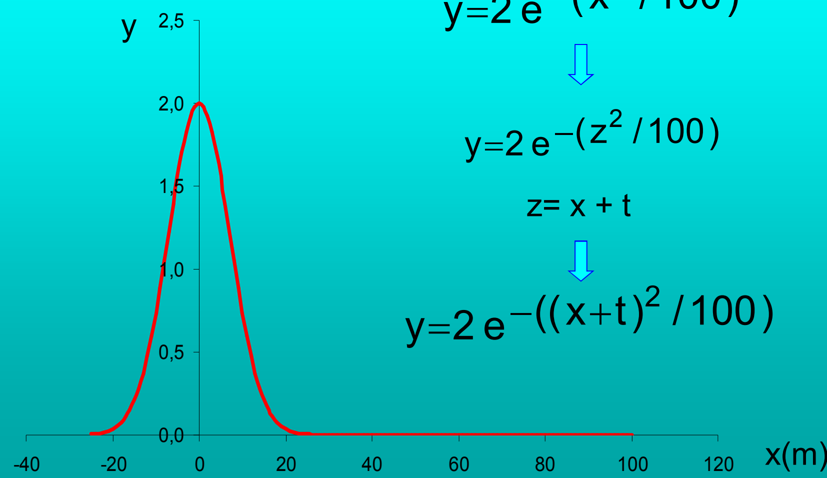
$$\Downarrow$$

$$y = 2\,e^{-(z^2/100)}$$

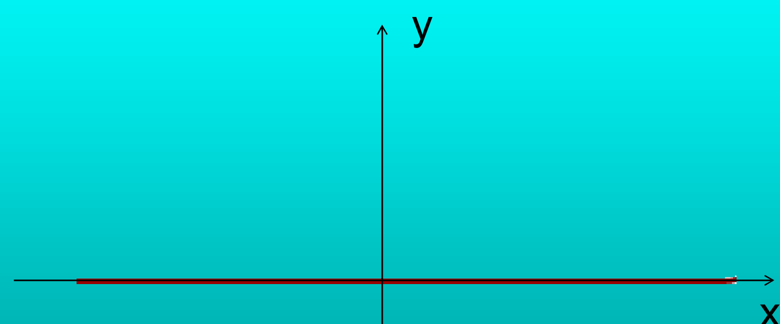
$$z = x + t$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2\,e^{-((x+t)^2/100)}$$



$$y = 2\,e^{-((x+vt)^2/100)}$$



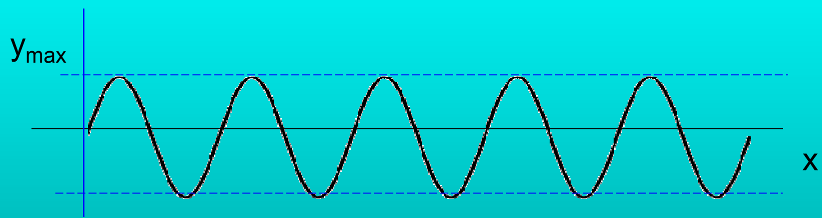
Neste caso, o pulso propaga-se para a esquerda com velocidade v.

16.4,5

ONDAS SENOIDAIS PROGRESSIVAS

Uma onda senoidal se propagando no eixo dos x no sentido positivo é descrita pela função:

$$y = y_{max}\ \mathrm{sen}\ (\ kx-\omega t + \phi) = y_{max}\mathrm{sen}(k(x-\omega/k\ t)+\phi)$$

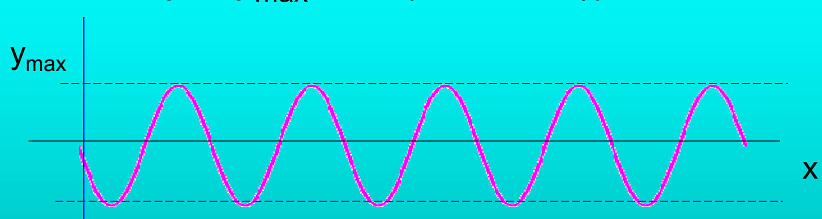


$v = \omega / k$ →

y_{max} é a **amplitude** da onda, **k** é o **número de onda**, ω é a **freqüência angular**, ϕ é a **constante de fase** e **v** é a **velocidade de propagação**.

Uma onda senoidal se propagando no eixo dos x no sentido negativo é descrita pela função:

$$y = y_{max}\ \mathrm{sen}\ (\ kx+\omega t + \phi)$$



← $v = \omega / k$

Comprimento de onda	$\lambda = 2\pi/\ k$
Período da onda	$T = 2\pi/\ \omega$
Velocidade de propagação	$v = \omega / k = \lambda / T$

Comprimento de onda

$\lambda = 2\pi/\, k = vT$

Período

$T = 2\pi/\, \omega$

Freqüência

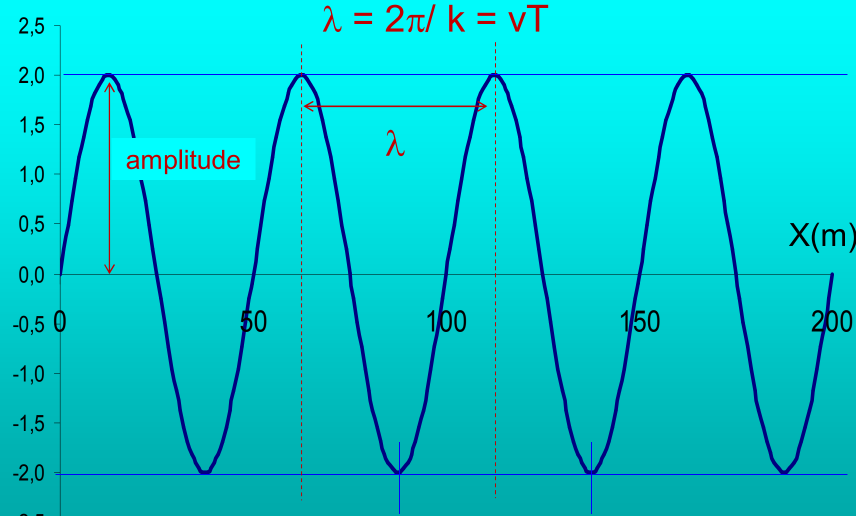
$f = 1/T$

Velocidade de propagação

$v = \omega \,/\, k = \lambda \,/\, T = \lambda f$

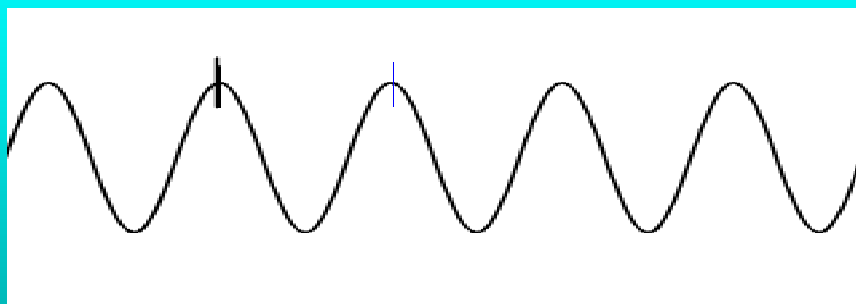
Comprimento de onda

$\lambda = 2\pi/\, k = vT$



$\lambda = 2\pi/k = 50m$

$$\lambda = vT$$

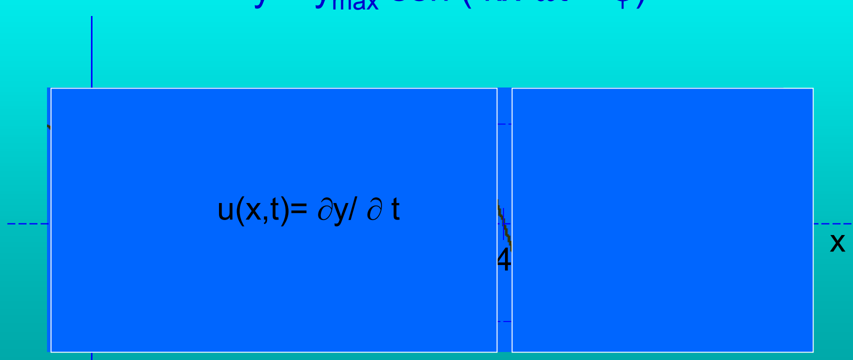


A onda percorre uma distância λ no tempo T(período)

Considere uma onda progressiva propagando-se em uma corda no sentido dos x positivo.

Para calcular a velocidade e a aceleração de um ponto da corda, fixa-se a posição e verifica-se o movimento da corda.

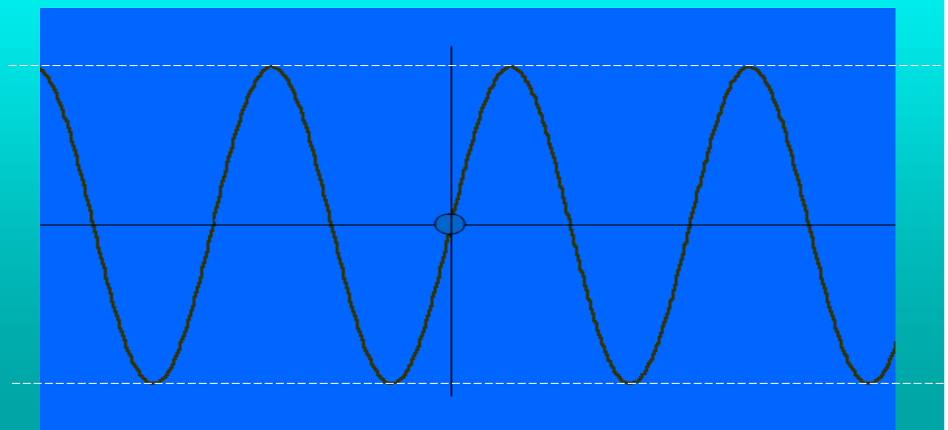
$$y = y_{max} \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$



Velocidade $u(x,t) = \partial y/\partial t$ da corda no ponto x =4

VELOCIDADE
dos pontos da corda

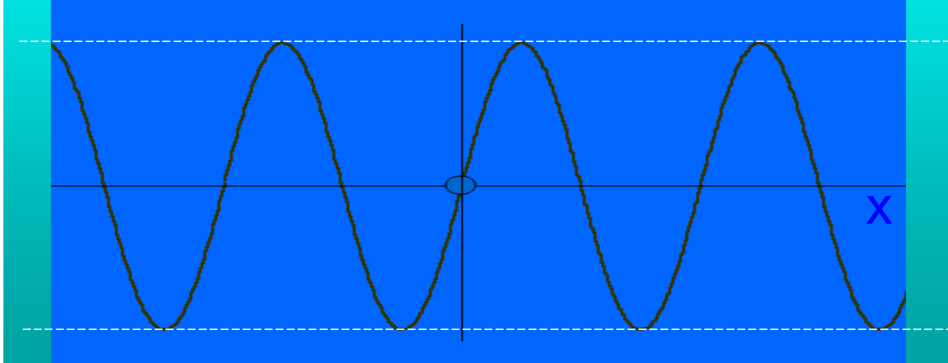
$$u = \partial y / \partial t = -y_{max}\omega \cos(kx - \omega t + \varphi)$$



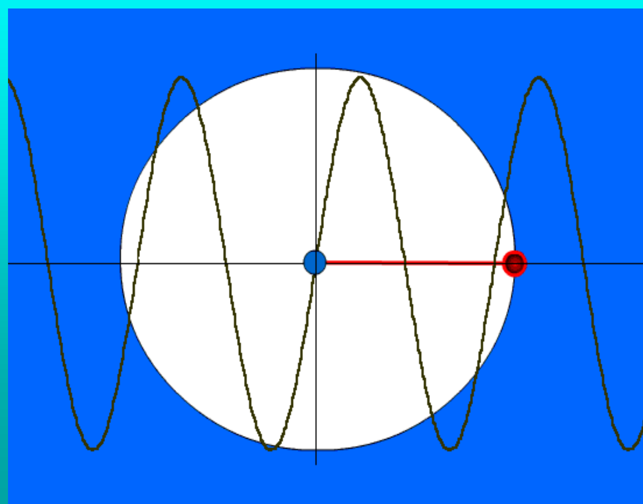
ACELERAÇÃO
dos pontos da corda

$$a_y = \partial u / \partial t = \partial^2 y / \partial t^2$$

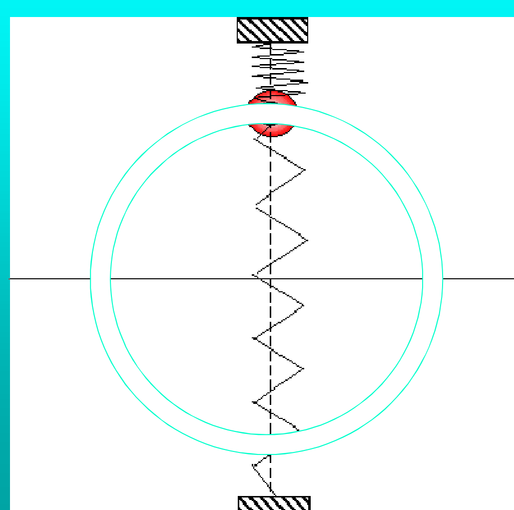
$$a_y = -y_{max}\omega^2 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$



Observa-se que o ponto da corda realiza um movimento MHS.

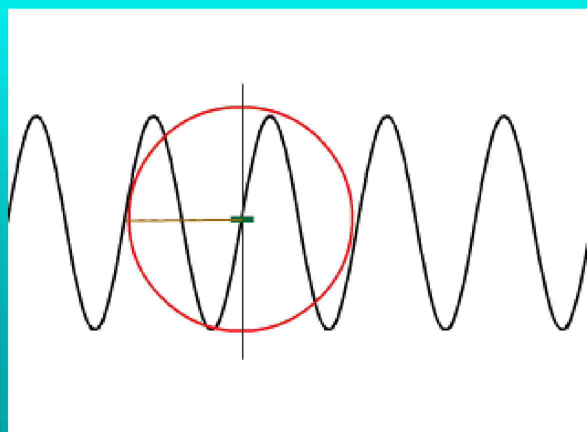


Análogo ao movimento da massa presa a uma mola.

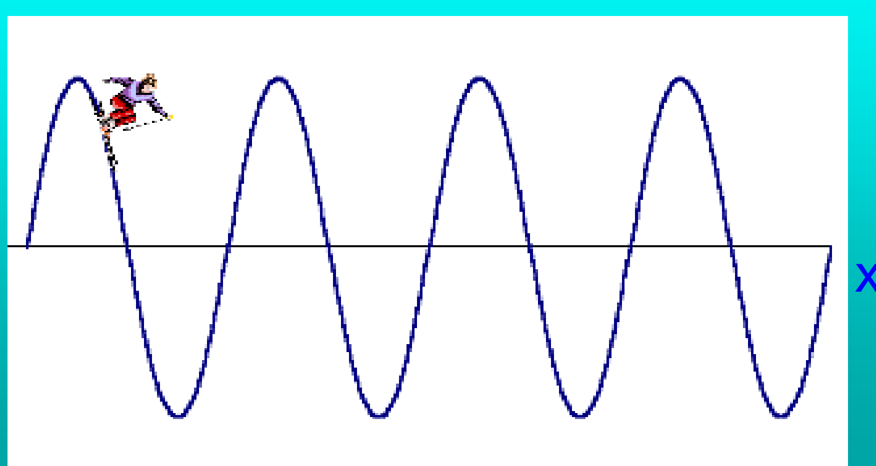


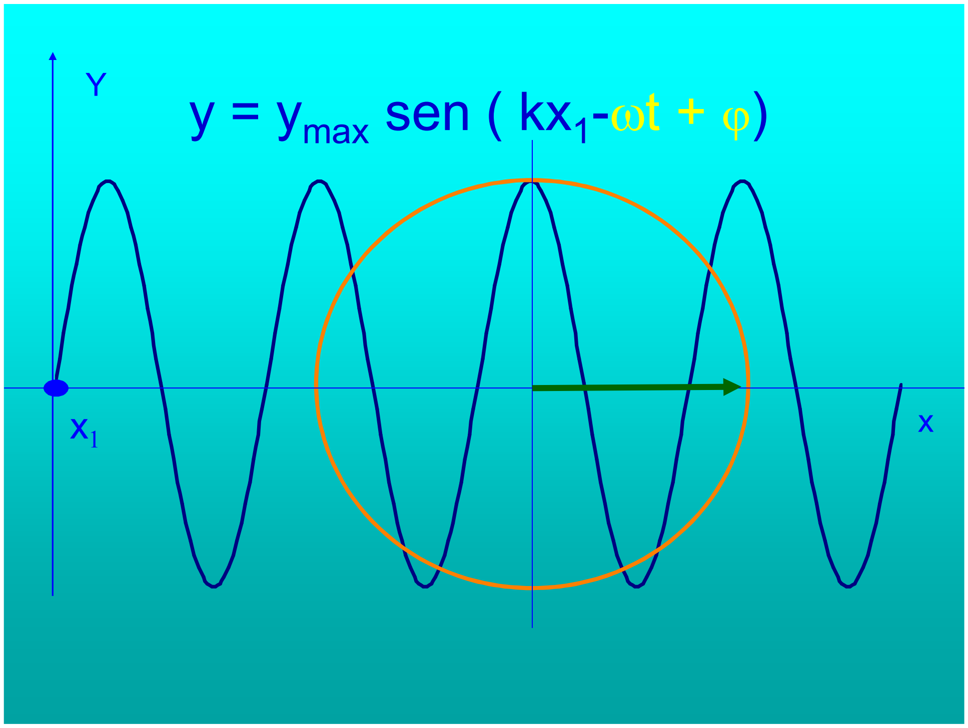
Em uma dada posição a diferença de fase da onda entre dos instantes diferentes pode ser escrita como:

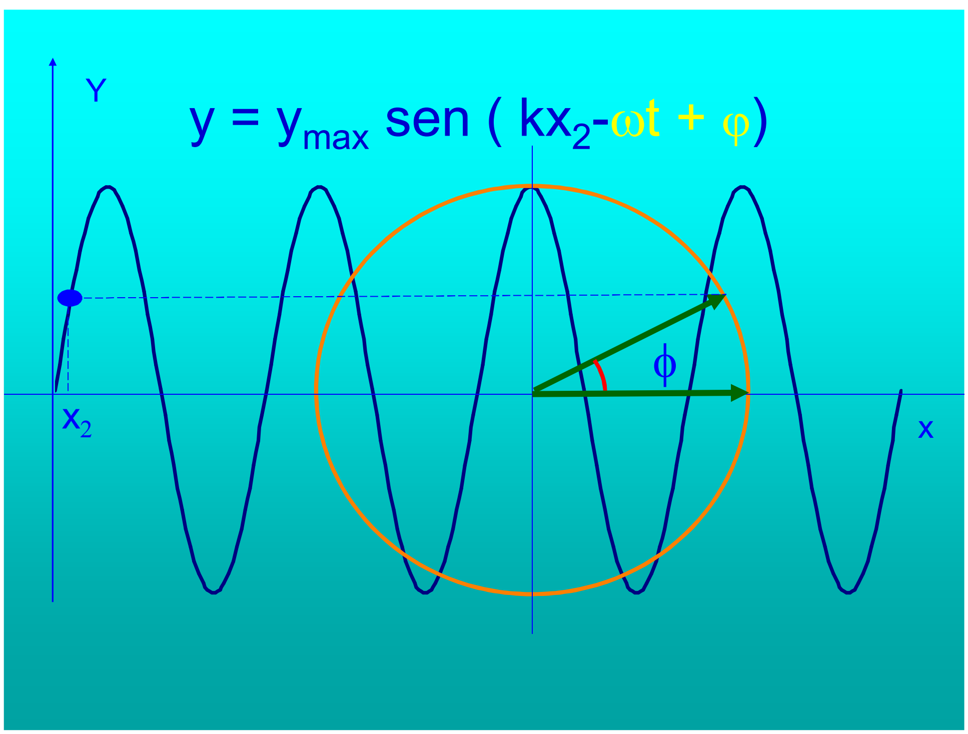
$$\Delta\phi = \omega\Delta t$$

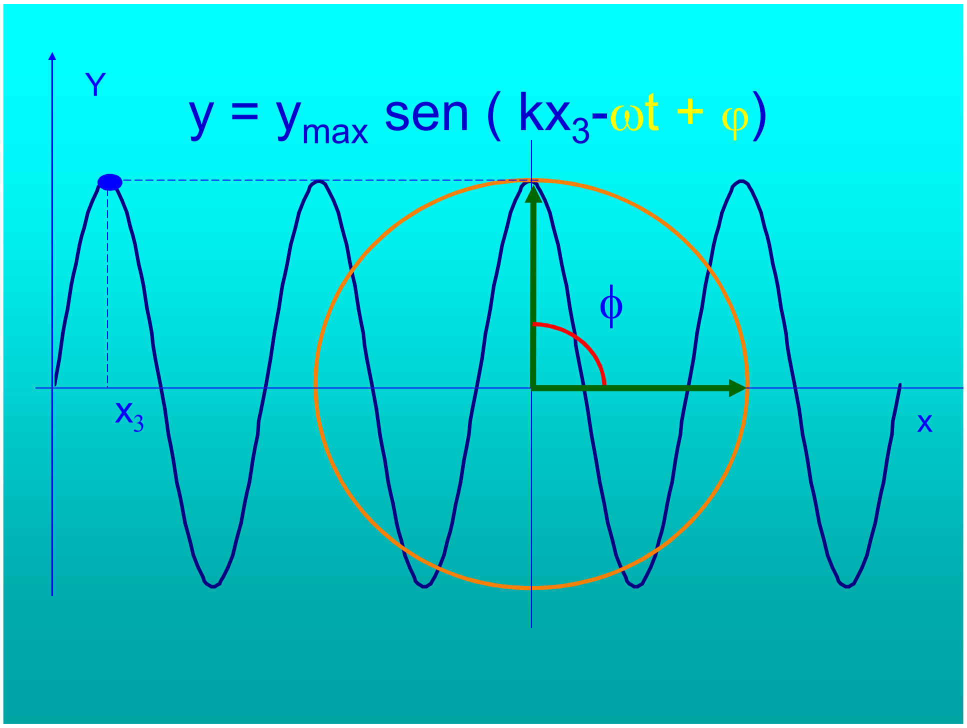


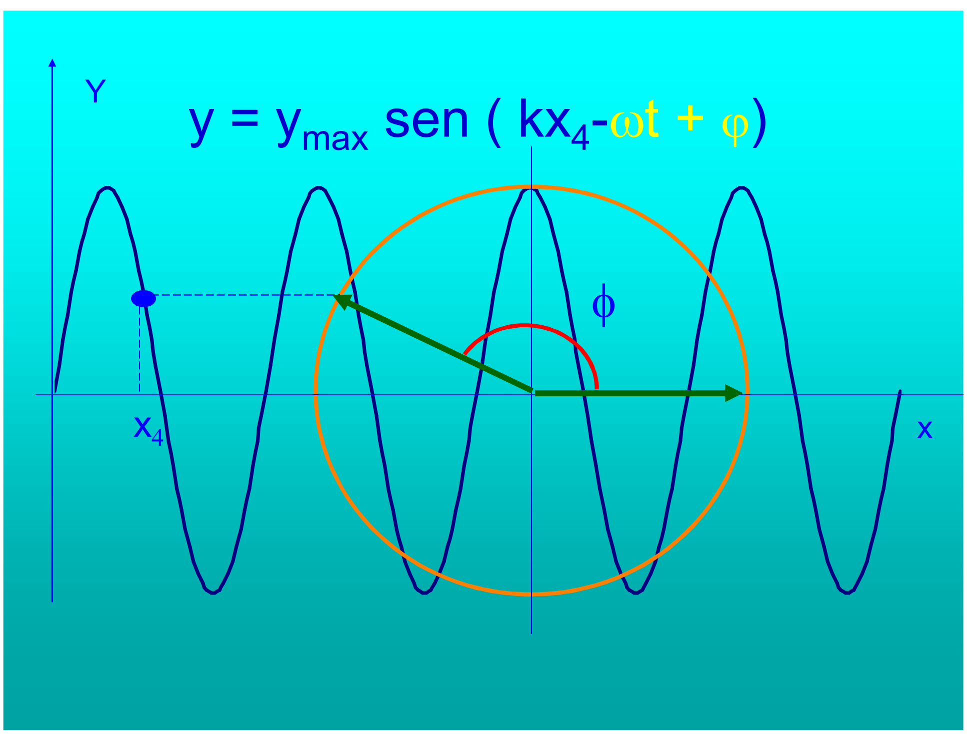
A fase da onda varia ao longo do eixo x em cada instante.

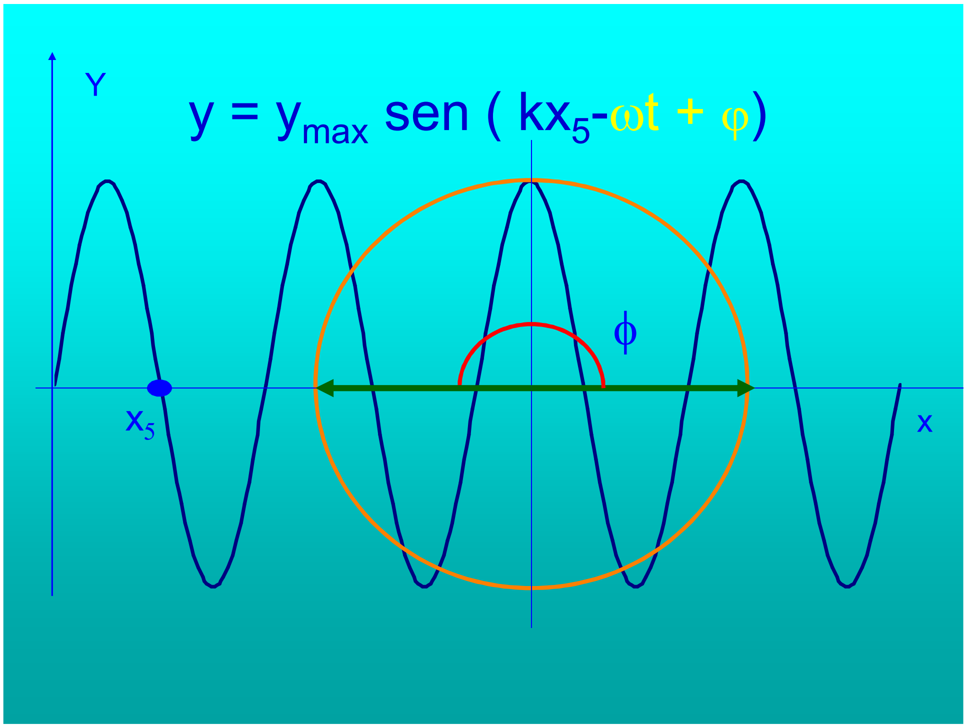


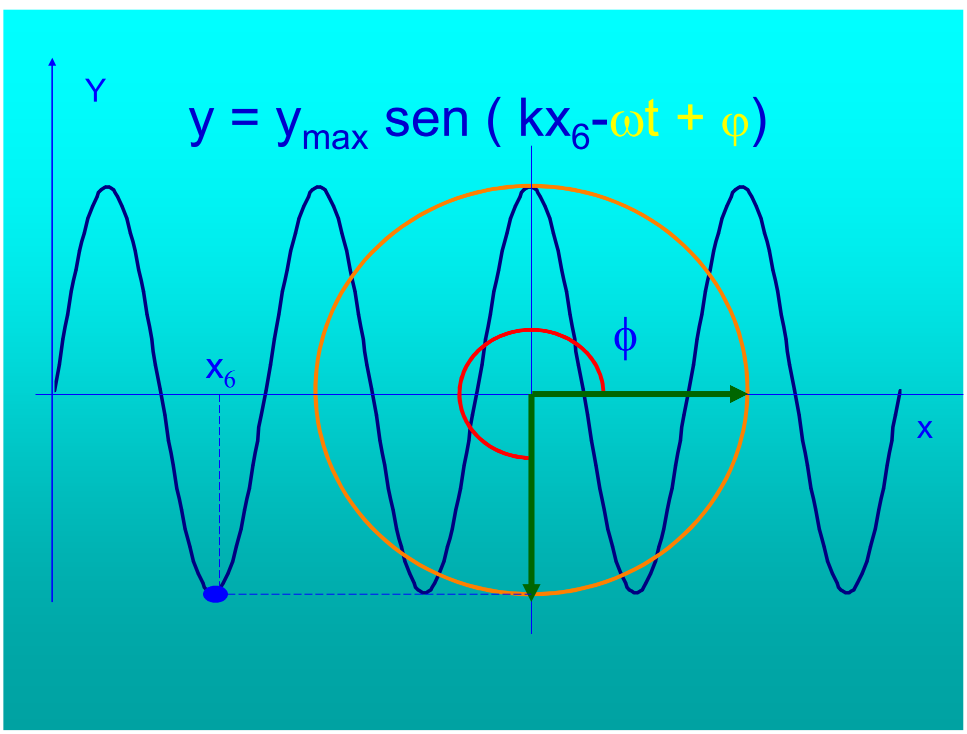

Y
y = y_max sen (kx_1-ωt + φ)
x_1
x

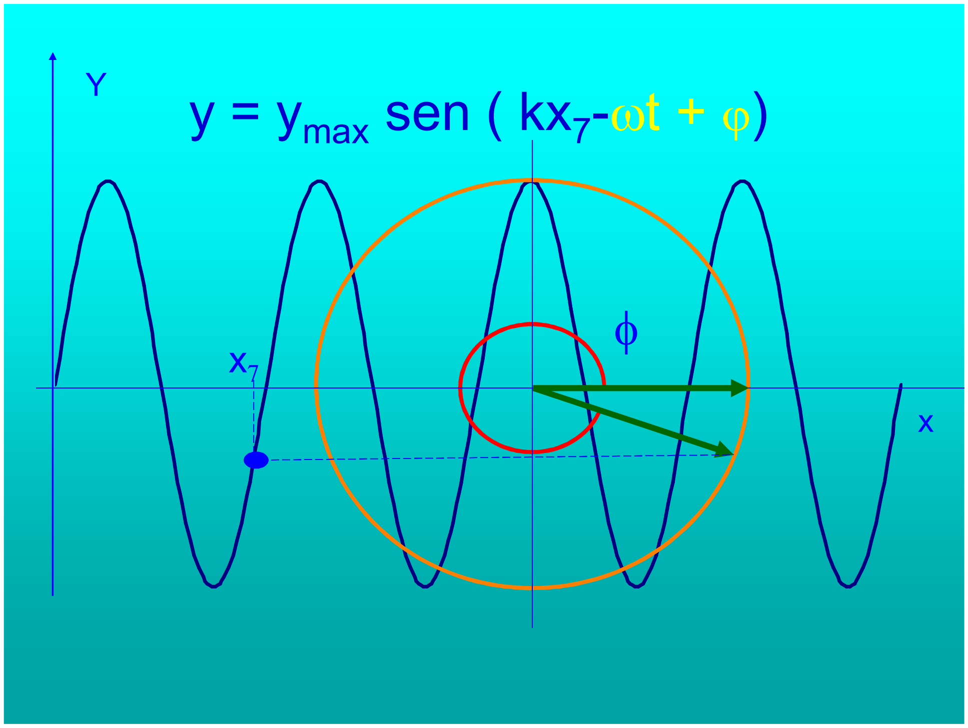

Y
y = y_max sen (kx_2-ωt + φ)
ϕ
x_2
x

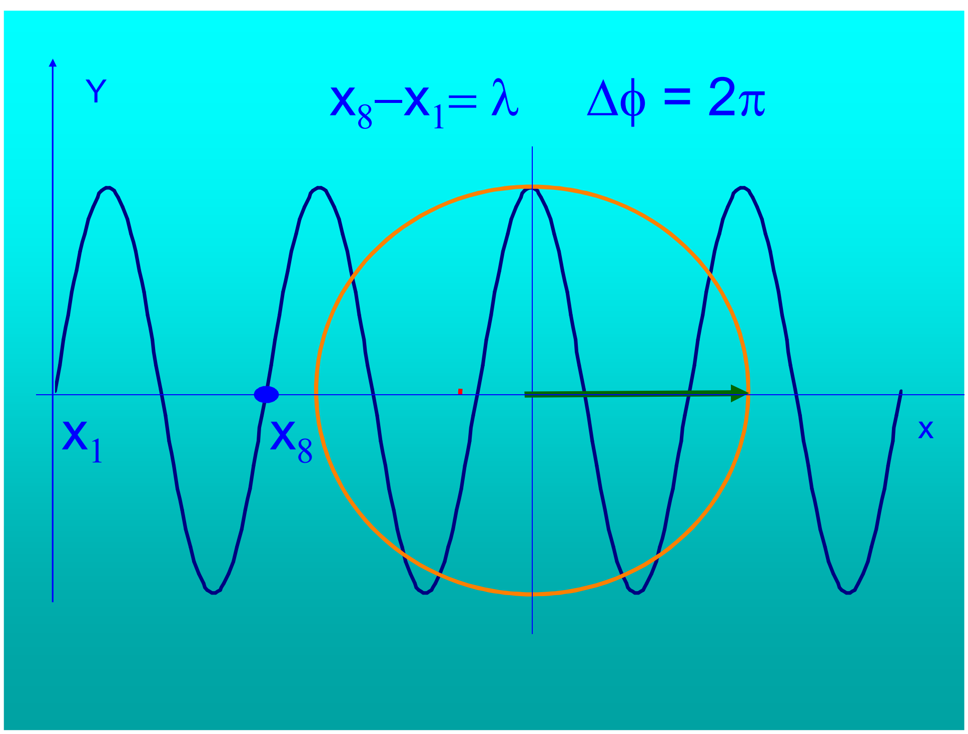

Y
y = y_max sen (kx_3-ωt + φ)
ϕ
x_3
x

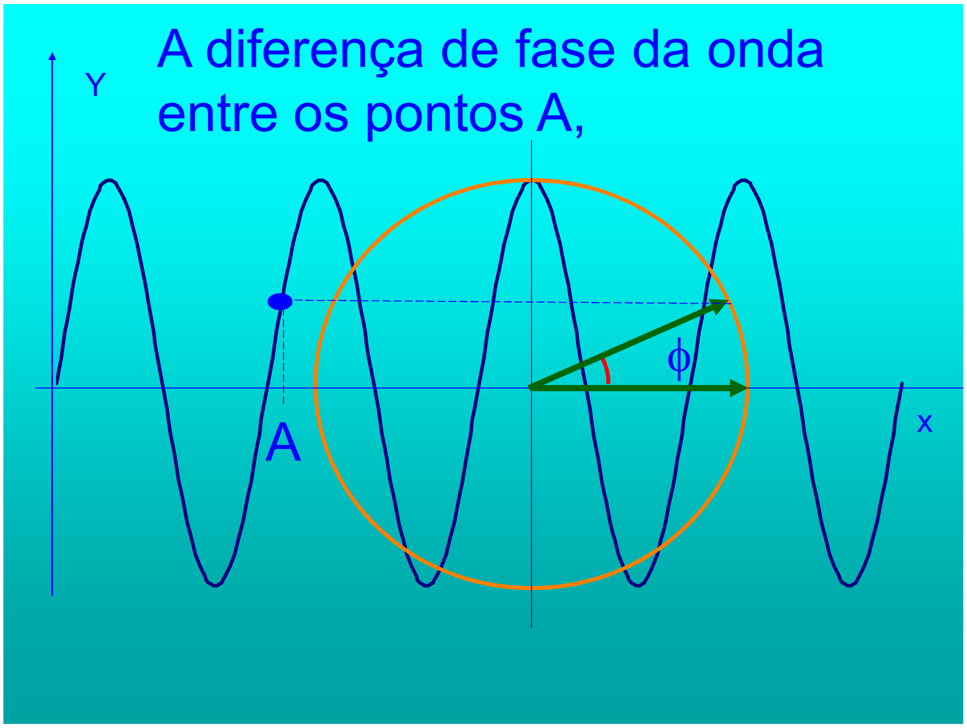

Y
y = y_max sen (kx_4-ωt + φ)
ϕ
x_4
x

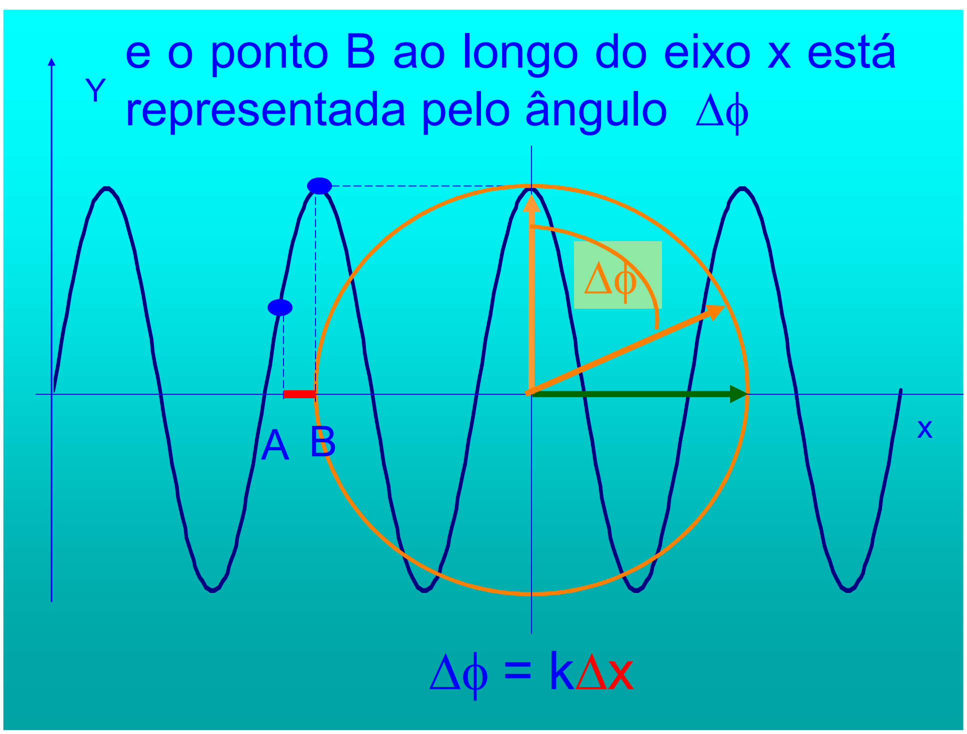

Y
$y = y_{max}$ sen (kx_5-ωt + φ)
ϕ
x_5
x


Y
$y = y_{max}$ sen (kx_6-ωt + φ)
ϕ
x_6
x


Y
y = y$_{max}$ sen (kx$_7$-ωt + φ)
ϕ
x$_7$
x


Y
x$_8$–x$_1$= λ Δϕ = 2π
x$_1$
x$_8$
x


A diferença de fase da onda
entre os pontos A,
Y
ϕ
x
A


e o ponto B ao longo do eixo x está
representada pelo ângulo Δϕ
Y
Δϕ
x
A B
Δϕ = kΔx

A fase da onda depende de x e t

$$\phi = kx \pm \omega t + \phi_o$$

$$y = y_{max} \text{ sen } \phi$$

A diferença de fase entre duas ondas pode ser devida a um atraso entre elas ou a uma diferença no caminho percorrido por elas.

$$\Delta\phi = k\Delta x \quad \text{ou} \quad \omega \Delta t$$

Prob. 16.2, 3

Uma onda que se propaga ao longo de uma corda é descrita por

$$y(x,t) = 0.0030 \text{ sen } (70x - 2{,}7t)$$

Onde as constantes numéricas estão no SI.

(a) Qual é a amplitude? (b) Quais são λ, T e f da onda?

(c) Qual é a velocidade da onda?

(d) Qual é o deslocamento do ponto da corda na posição x = 20 cm em t = 10 s?

(e) Qual é a velocidade transversal da corda nessa posição, nesse mesmo instante?

(f) Qual sua aceleração transversal?

16.6

Velocidade de propagação da onda

A velocidade de propagação v de uma onda depende de características do meio.

Em uma corda **v** depende da tração τ e da densidade linear μ da corda.

Análise dimensional

$\mu = m / L$ (massa por unidade de comprimento)

$\tau = m L / t^2$ (força = massa x aceleração)

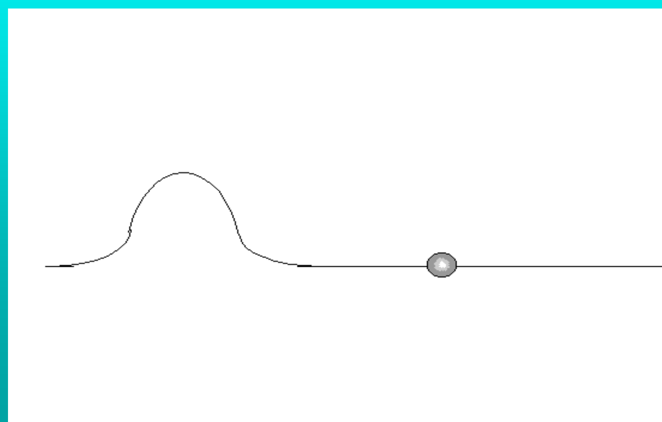
$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

16.7

ENERGIA TRANSPORTADA PELA ONDA

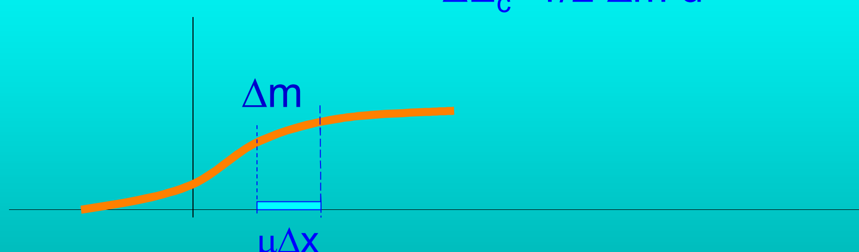
Uma onda transporta energia.

Uma partícula colocada em uma corda sente a passagem da onda adquirindo energia cinética, que faz com que ela se desloque acompanhando a deformação da corda.



Um pedaço de corda de massa Δm adquire uma energia cinética ΔE_c

$$\Delta E_c = 1/2\ \Delta m\ u^2$$



A massa Δm pode ser escrita como

$\Delta m = \mu\ \Delta x$

onde μ é a densidade linear da corda.

Supondo Δm muito pequeno a energia cinética ΔE_c se escreve como:

$$dEc = ½\, dm\, u^2$$
$$dm = \mu\, dx$$
$$u = \partial y / \partial t$$
$$u = - y_m\, \omega \cos (kx - \omega t + \phi)$$
$$dE_c = ½\, \mu\, dx\ u^2$$
$$dE_c = ½\, \mu\, dx\, y_m^2\, \omega^2 \cos^2 (kx - \omega t + \phi)$$
$$dE_c/dt = ½\, \mu\, dx/dt\, y_m^2\, \omega^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)$$

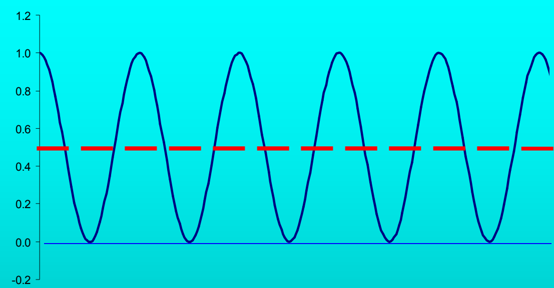
Sendo $v = dx/dt$ a velocidade de propagação da onda, a variação no tempo da energia cinética se escreve:

$$dE_c /dt = ½\, \mu\, v\, u^2$$
$$dE_c /dt = ½\, \mu\, v\ y_{max}^2 \omega^2 \cos^2 (kx - \omega t + \phi)$$

A média no tempo da derivada da energia cinética é proporcional a média do $\langle \cos^2 \rangle = ½$.

$$\langle dE_c /dt \rangle = ½\, \mu\, v\, y_{max}^2\, \omega^2\ \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle$$

Média de $<\cos^2> = ½$



$$<dE_c/dt> = ½\ \mu\ v\ \ y_{max}^2\ \omega^2\ <\cos^2(kx - \omega t + \phi)>$$

$$<dE_c/dt> = ½\ (½\ \mu\ v\ \ y_{max}^2\ \omega^2)$$

A energia total $E_t = E_c + E_p$

A média da taxa de variação da energia total

$$<dE_t/dt> = <dE_c/dt> + <dE_p/dt>$$

como $<dE_c/dt> = <dE_p/dt>$

$$dE_t/dt_{\text{média}} = 2\ ½\ (½\ \mu\ v\ \ y_{max}^2\ \omega^2)$$

$$\text{Potência}_{\text{média}} = dE_t/dt_{\text{média}} = ½\ \mu\ v\ \ y_{max}^2\ \omega^2$$

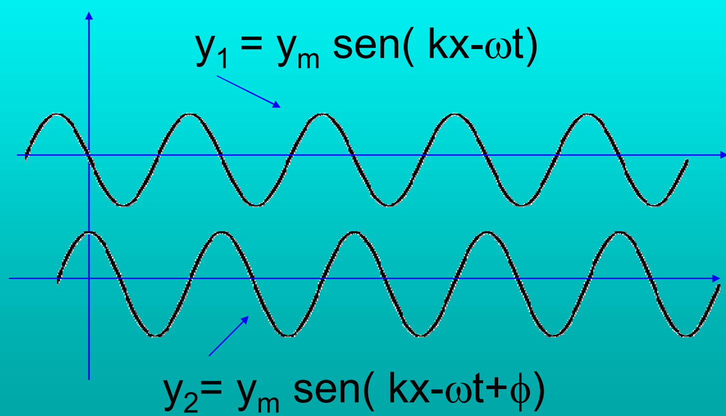
A potência média é proporcional ao quadrado da amplitude y_{max}^2.

SUPERPOSIÇÃO DE ONDAS

Interferência de ondas caminhando no mesmo sentido

A deformação resultante é a soma das deformações das ondas na corda.

Considere duas ondas senoidais caminhando no sentido dos x positivo com uma diferença de fase ϕ entre elas.



A onda resultante é

$$y_R = y_1 + y_2$$

isto é,

$$y_R = y_m \operatorname{sen}(\underbrace{kx-\omega t}_{B}) + y_m \operatorname{sen}(\underbrace{kx-\omega t+\phi}_{A})$$

Utilizando a relação trigonométrica

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\cos[(A-B)/2] \,.\, \operatorname{sen}[(A+B)/2]$$

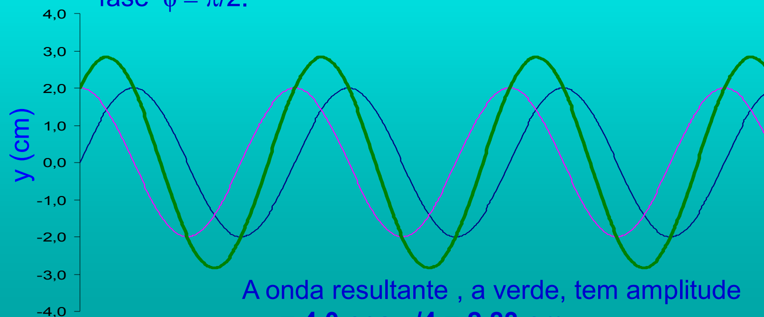
$A = kx-\omega t+\phi$ $\qquad$ $B = kx-\omega t$

$(A+B)/2 = kx-\omega t+\phi/2$; $\quad (A-B)/2 = \phi/2$

$$y_R = 2\ \cos[(A-B)/2]\ \text{sen}[(A+B)/2]$$

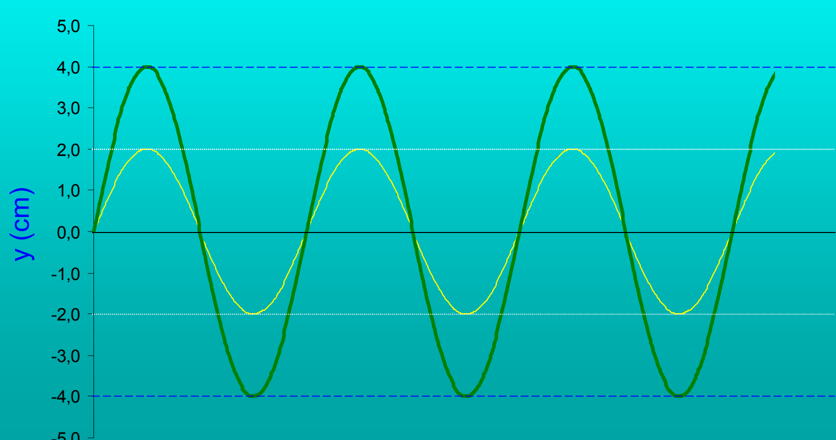
$$y_R = \underbrace{2y_m \cos \phi/2}_{\text{amplitude}}\ \text{sen}(kx-\omega t+\phi/2)$$

No exemplo, as ondas têm mesma amplitude e diferença de fase $\phi = \pi/2$.

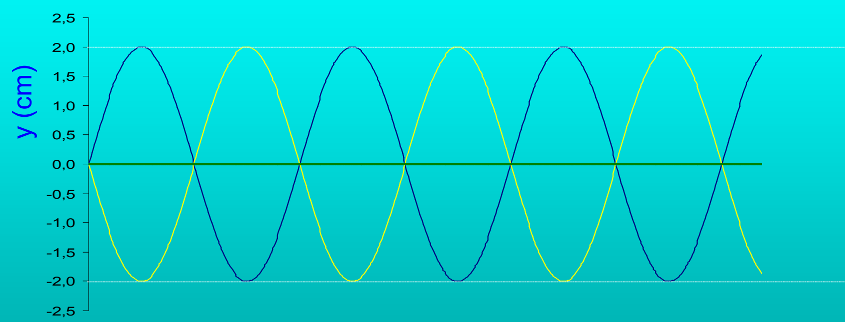


A onda resultante , a verde, tem amplitude
y_m = 4,0 cos π/4 = 2,83 cm.

Quando a diferença de fase for um número par de π, as ondas estão fase. A onda resultante tem amplitude igual à soma das amplitudes.



Quando a diferença de fase é um número ímpar de π, as ondas estão em oposição de fase.

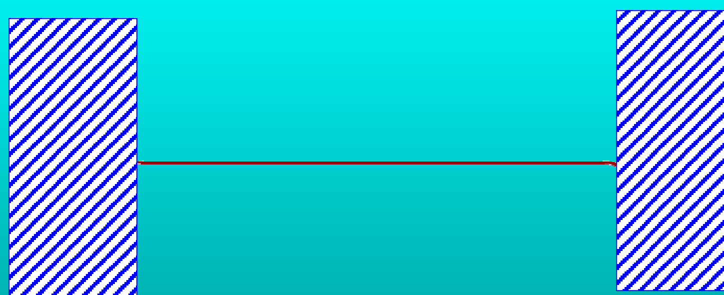


A onda resultante tem amplitude igual à diferença das amplitudes.

ONDAS ESTACIONÁRIAS

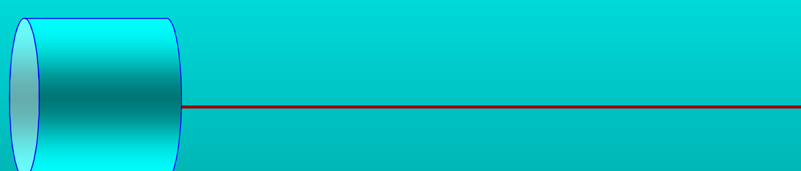
Superposição de ondas caminhando em sentidos opostos

REFLEXÃO DE PULSO EM UMA PAREDE RÍGIDA

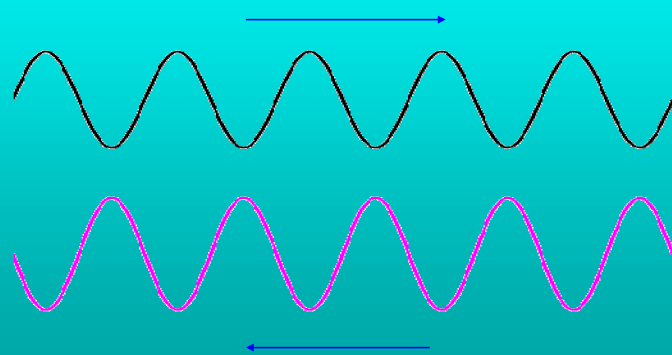


O pulso refletido sofre uma mudança de fase de 180^{o}

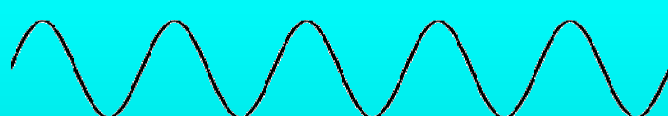
Na reflexão em uma corda aberta, o pulso refletido retorna em fase com o incidente.



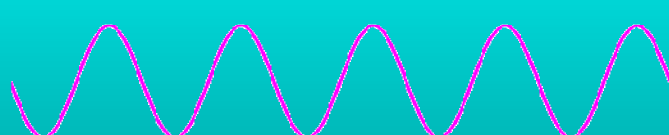
Uma onda estacionária é a onda resultante da superposição de ondas caminhando em sentidos opostos.



$y_D = y_o \, \text{sen}\,(kx - \omega t)$



$y_E = y_o \, \text{sen}\,(kx + \omega t)$



$$y = y_D + y_E$$

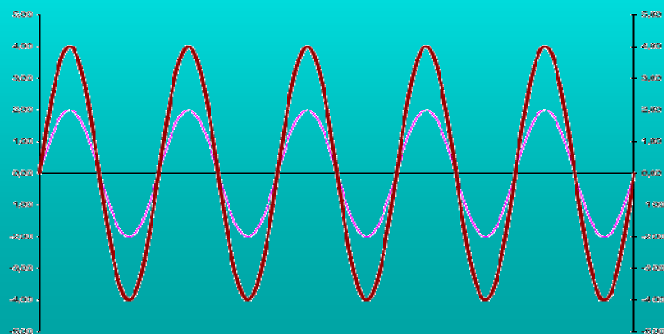
$$y_R = y_o\,(\text{sen}\,(kx - \omega t) + \text{sen}\,(kx + \omega t))$$

$$A = kx - \omega t \quad ; \quad B = kx + \omega t$$

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\,[(A+B)/2]\,\cos\,[(A-B)/2]$$

$$(A + B)/2 = kx \quad ; \quad (A - B)/2 = -\,\omega t$$

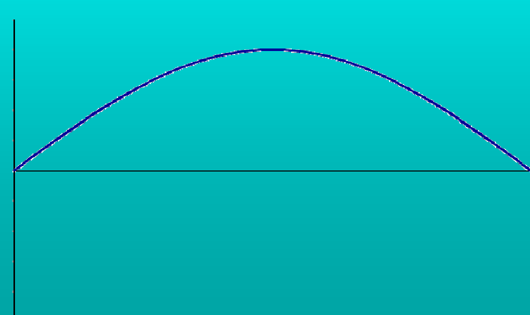
$$y_R = 2\,y_o\,\text{sen}\,kx\,\cos\,\omega t$$



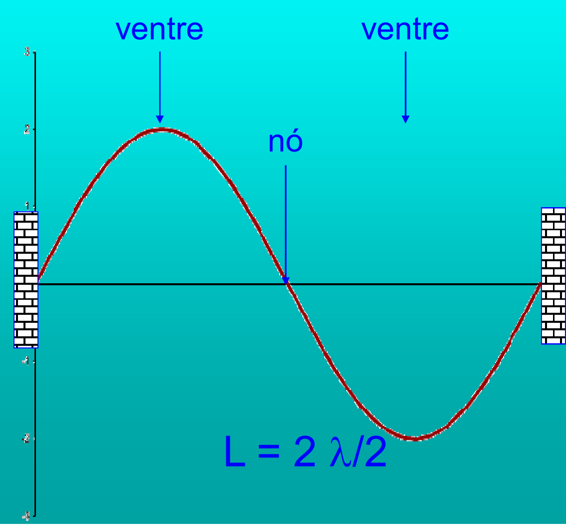
Quando a corda tem as extremidades fixas, nos pontos fixos a amplitude da onda deve ser nula.

O primeiro modo de vibração de uma corda de comprimento L com as duas extremidades fixas.

$$L = \lambda/2$$



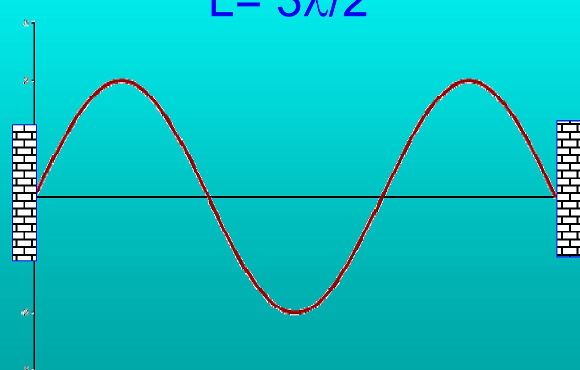
O segundo modo de vibração



$L = 2\ \lambda/2$

O terceiro modo de vibração

$L = 3\lambda/2$



Modos normais de vibração de uma corda presa nas extremidades.

$$L = n\lambda / 2 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2L / n$$

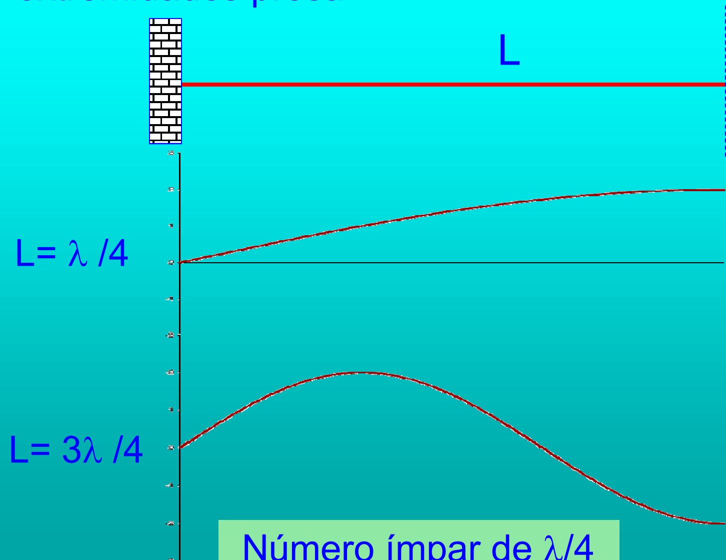
sendo $v = \omega / k = \lambda / T = \lambda f$

As freqüências correspondentes aos modos normais são:

$$f_n = n\ v / 2L$$

$n = 1,2,3,4\ldots$

Caso de uma corda com somente uma das extremidades presa



Número ímpar de $\lambda/4$

Modos normais de vibração da corda com uma extremidade presa

$$L = (2n+1)\, \lambda / 4$$

$$\lambda_n = 4\, L / (2n+1)$$

$$f_n = (2n+1)\, v / 4L$$

$n = 0,1,2,3,4\ldots$