Gabarito da P4, 2012.1

Questão 1

Em $\mathbb{R}^3$ um campo é conservativo se, e somente se $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Calculando para cada campo, temos:

(a)

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{bmatrix} = (-1, -1, -1) \neq (0, 0, 0),$$

logo, este campo não é conservativo.

(b)

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2y & x^3 + y^3 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 0),$$

logo este campo é conservativo. Para achar um potencial f resolvemos $\mathbf{F} = \nabla f$. Como $\partial_z f = 0$, f não depende de z. De $\partial_x f(x, y) = 3x^2y$, obtemos por integração que $f(x, y) = x^3y + h(y)$; então $\partial_y f(x, y) = x^3 + h'(y) = x^3 + y^3$ e daí que $h(y) = y^4/4 + c$. Assim, um potencial é $f(x, y) = x^3y + y^4/4$.

(c)

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z \cos yz + x & y \cos yz \end{bmatrix} = (0, 0, 0),$$

logo este campo é conservativo. Para achar um potencial f, resolvemos $\mathbf{F} = \nabla f$. Temos $\partial_x f(x, y, z) = y$, donde $f(x, y, z) = xy + h(y, z)$.

Então $\partial_y f = x + \partial_y h = z \cos yz + x \Rightarrow h(y, z) = \mathrm{sen} yz + g(z)$, ou seja $f(x, y, z) = xy + \mathrm{sen} yz + g(z)$; finalmente $\partial_z f = y \cos yz = y \cos yz + g'(z)$, donde $g(z) = c$, constante. Assim, um potencial é $f(x, y, z) = xy + \mathrm{sen} yz$.

Questão 2

Pelo Teorema de Green, com $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (xy^2, x+y)$, temos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \big(\partial_x Q - \partial_y P\big)\, dxdy = \int_0^1 \big[\int_{x^2}^{x} (1-2xy)dy\big]dx =$$
$$\int_0^1 \big(\big[y - xy^2\big]_{x^2}^{x}\big)dx = \int_0^1 \big(x - x^3 - x^2 + x^5\big)dx = \big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6}\big]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Questão 3

A forma mais simples é observar que fechando a superfície S com o disco plano S' (de raio $a > 0$), então, pelo Teorema de Gauss,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS + \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_E \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = 0,$$

pois, sendo o campo constante, tem divergente nulo. Assim,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

onde em S' o vetor normal é $-\hat{\mathbf{k}} = (0,0,-1)$; assim, em S', temos $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = (0,0,\lambda)\cdot(0,0,-1) = -\lambda$ e finalmente:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = -(-\lambda)\iint_{S'} dS = \lambda A(S') = \lambda\pi a^2.$$