GABARITO P1 2009.1 - MAT1162

1-

$$x^2 - 3xy + y^2 = 3$$

O valor dos coeficientes dos termos quadráticos em x e y são iguais, o que nos mostra que se trata de uma cônica rotacionada de 45 graus.

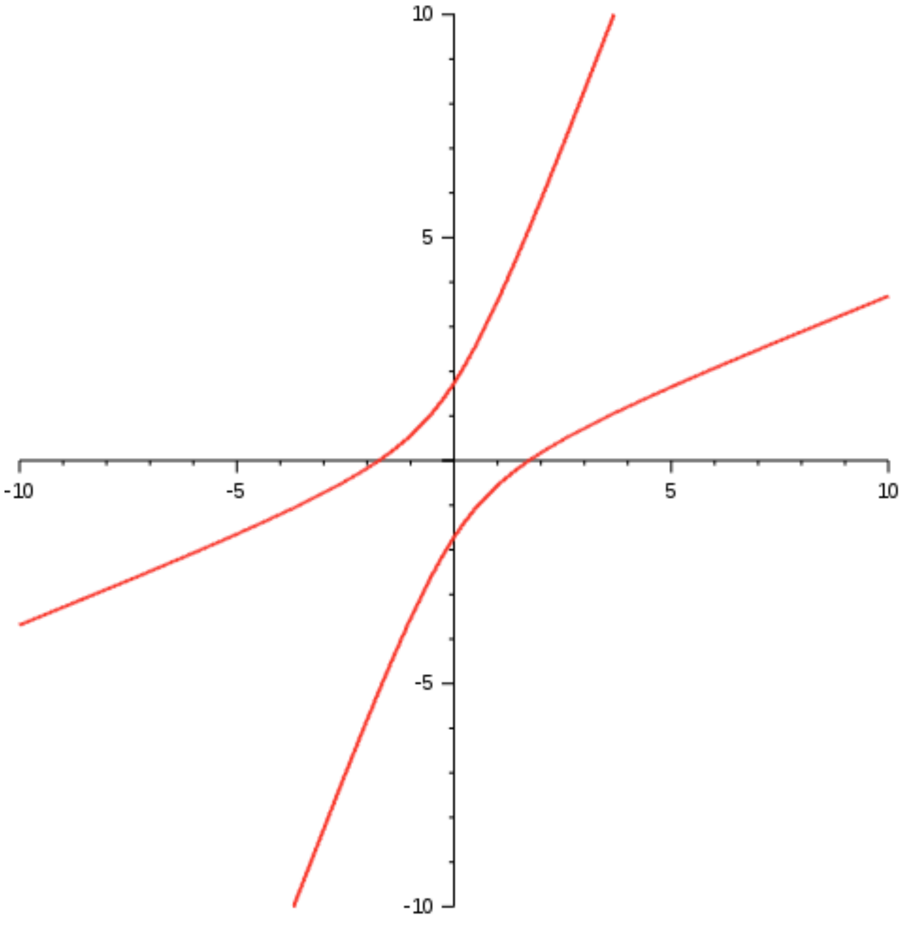
$$x = x'.\cos\theta - y'.\sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$y = x'.\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$\left(\frac{x'\sqrt{2} - y'\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x'\sqrt{2} + y'\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3{+}3.\left(\frac{x'\sqrt{2} - y'\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{x'\sqrt{2} + y'\sqrt{2}}{2}\right)$$

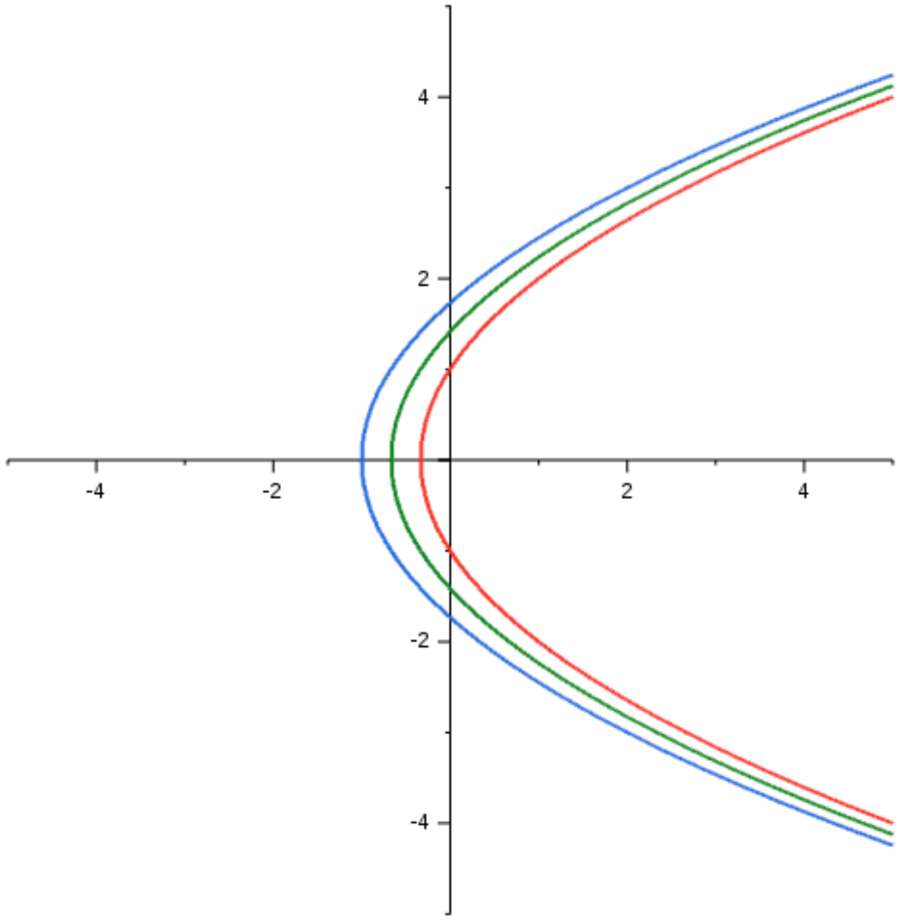
Simplificando, temos:

$$\frac{y'^2}{6/5} - \frac{x'^2}{6} = 1$$



Trata-se, portanto, de uma hipérbole com focos no eixo y', sendo y' e x' um sistema de eixos ortogonais rotacionados de 45 graus.

2-A-



As superfícies de nível 3 (em azul), 2 (em verde) e 1 (em vermelho) estão dispostas, respectivamente, da esquerda para a direita.

2-B- Para que a reta tangente tenha a dita inclinação, seu coeficiente angular deve valer 1. Derivando implicitamente a curva C, temos:

$$2y.y' - 3 = 0$$

$$y' = \frac{3}{2y} = 1$$

$$y = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{5}{12}$$

Logo, o ponto encontrado é:

$$\left(\frac{5}{12}, \frac{3}{2}\right)$$

2-C- A equação paramétrica da reta r é dada por:

$$r : t(1,1) + \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{2}\right)$$

3-A- O conceito de derivada direcional consiste em um produto escalar entre o divergente/gradiente da função no ponto dado com o vetor diretor na direção dada. Trata-se de uma projeção da variação vetorial da função na direção dada. Logo, dados diversos vetores, um ponto e uma função, a solução consiste em calcular o gradiente da função neste ponto e comparar com o produto escalar com os vetores a serem avaliados. O vetor correspondente ao maior valor é a resposta.

3-B-

$$\triangledown f(x,y) = (4x[x^2 + (y+1)^2], 4(y+1)[x^2 + (y+1)^2])$$

$$\triangledown f(x,y). \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}[x^2 + (y+1)^2].(x + y + 1)$$

3-C- A equação do plano tangente é dada por:

$$\pi : (x-2).\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + (y-1).\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = (z - 64)$$

$$64x + 64y - z = 128$$