Critério de correção da G3 de Equações Diferenciais – 2013.2

MAT 1154

Data: 30 de novembro de 2013

1) Considere o problema abaixo que representa o comportamento de duas espécies (com densidades populacionais $x(t)$ e $y(t)$) competindo por suprimentos comuns.

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x + 0,5y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(2,5 - 1,5y + 0,25x)$$

a) Determine as singularidades e classifique-as. (1 pt = 0,25 por cada singularidade corretamente classificada)

Resposta:

As singularidades do sistema são

1. $(0,0)$ repulsor;
2. $(1,0)$ sela;
3. $(0,\frac{5}{3})$ sela;
4. $(2,2)$ atrator.

b) Esboce as trajetórias do retrato de fase no primeiro quadrante. (1 pt = 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25)

Resposta:

No esboço é importante representar os seguintes fatos:

1. Os eixos coordenados contém soluções que tendem aos atratores, e portanto toda solução que começa no primeiro quadrante permanece no primeiro quadrante. (0,25 pt)
2. As soluções cruzam a reta $1 - x - \frac{1}{2}y = 0$ tangentes à direção vertical. (0,25 pt)

3. As soluções cruzam a reta $2,5 - 1,5y + 0,25x = 0$ tangentes à direção horizontal. (0,25 pt)
4. Toda solução que não esteja em uma das separatrizes da sela tende a um dos atratores. (0,25 pt)

c) Para quais condições iniciais existe uma configuração de equilíbrio na qual nenhuma espécie desaparece , e qual é esta configuração? (0,5 pt = 0,25 + 0,25)

Resposta:

A única solução de equilíbrio em que não há extinção é a que tem dados iniciais $(2, 2)$.(0,25 pt) Soluções com dados iniciais fora dos eixo convergem para a configuração de equilíbrio em $(2, 2)$ quando $t \to +\infty$ (0,25 pt).

Soluções com dados iniciais nos eixo configuram a extinção de alguma espécie.

2) Decida sobre a convergência das séries abaixo:

a) (0,5 pt = 0,2 + 0,3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{n\sqrt(n)}$$

Resposta:

A série converge absolutamente pelo critério da integral (0,2 pt). Com efeito, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid cos(n) \mid}{n\sqrt(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

e a última converge dado que

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{T\to\infty} \int_{1}^{T} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = 2.$$

Como toda série que converge absolutamente é convergente, temos que a série converge (0,3 pt).

b) (0,5 pt = 0,2 + 0,3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n}{n^3+6n^2+8n+2}$$

Resposta:

Como sabemos que se uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (0,2 pt), temos que a série diverge dado que o termo $a_n = \frac{n^3+n}{n^3+6n^2+8n+2}$ tende a 1 se $n \to \infty$ (0,3 pt).

c) (0,5 pt = 0,2 + 0,3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n!}$$

Resposta:

O quociente a_{n+1}/a_n pode ser escrito como,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}{(\frac{2}{3})^n+1}\right)\frac{3^{n+1}}{3^n} \\
&= \frac{3}{n+1}\left(\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}{(\frac{2}{3})^n+1}\right).
\end{aligned}$$

(observar que o critério do quociente se aplica e escrever o quociente 0,2). Portanto temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1}\left(\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}{(\frac{2}{3})^n+1}\right),$$

e como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}{(\frac{2}{3})^n+1} = 1$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1}\left(\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}{(\frac{2}{3})^n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

A série então converge. (cálculo correto dos limites 0,3 pts).

3) (2 pts = 0,5 + 0,3 + 0,5 + 0,5 + 0,2) Estude a convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{3^n n^2}$$

Resposta:

Aplicando a definição de raio de convergência, $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n n^2}$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\mid a_n \mid}{\mid a_{n+1} \mid} &= \lim_{n\to\infty} 3 \frac{(n+1)^2}{n^2} \\ &= 3 \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^2 = 3 \end{aligned}$$

O raio de convergência da série é 3 (0,5 pts)

O centro da expansão da série é o ponto $x_0 = -2$, e portanto o intervalo de convergência da série tem extremos 1 e -5 (0,3 pts).

Se fazemos $x = 1$ a série assume a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

que converge pelo critério da integral (0,5 pts).

Substituindo $x = -5$ na série temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

que também converge pelo critério da integral (0,5 pts). Portanto, o intervalo de convergência da série é $[-5, 1]$ (0,2 pt).

4) (1 pt = 0,4 + 0,2 + 0,4) Ache a expansão em série de potências de $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ em torno de $x = 0$.

Resposta:

Sabemos que a série de Taylor da função $y(x) = e^x$ é $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (0,4 pts). Portanto, a série que representa a função $g(x) = e^{-x}$ é $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ (0,2 pts). O raio de convergência de ambas é ∞, e podemos então somar as séries termo a termo para representar a função $f(x)$ em forma de série de potências, ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^n + (-1)^n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

pois $1 + (-1)^n$ é igual a zero se n é ímpar e igual a 2 se n é par, fazendo com que a série tenha somente termos de grau par. (0,4 pts)

5) (3 pts) Considere a equação diferencial $y'' - 2x^2y' - 4xy = 0$ e

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a) (0,5 pts = 0,2 + 0,2 + 0,1) Mostre que para qualquer solução em série de potências $a_2 = 0$.

Resposta:

Escrevendo uma solução em forma de série de potências $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e substituindo na equação temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Multiplicando a segunda série por x^2 e a terceira por x temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

(Até aqui 0,2 pts)

Mudando o índice da primeira série para $k = n - 2$, $n = k + 2$, e da segunda e terceira séries para $k = n + 1$, $n = k - 1$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - 2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_{k-1}x^k - 4\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = 0.$$

(Até aqui mais 0,2 pts)

Podemos agora obter uma fórmula de recorrência para o termo de grau k. Como a primeira série é a única com termo de grau 0 temos

$$2.1a_2 = 0$$

o que implica automáticamente o enunciado. (0,1 pt)

b)(1 pts = 0,2 + 0,5 + 0,3) Mostre que $a_3 = \frac{2}{3}a_0$ e que $a_4 = \frac{1}{2}a_1$.

Resposta:

Continuando com o desenvolvimento do item anterior, a primeira e terceira séries são as únicas com termos de grau 1, e portanto

$$3.2a_3 - 4a_0 = 0$$

o que implica $a_3 = \frac{2}{3}a_0$ (0,2 pt),

e os termos de grau $k \geq 2$ aparecem em todas as séries, o que implica

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k-1)a_{k-1} - 4a_{k-1} = (k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k+1)a_{k-1} = 0.$$

Esta relação é equivalente a

$$a_{k+2} = \frac{2}{k+2}a_{k-1},$$

(0, 5 pt)

para todo $k \geq 2$. Substituindo $k = 2$ temos $a_4 = \frac{1}{2}a_1$. (0,3 pt)

c) Achar os primeiros 10 termos da solução com condição inicial $a_0 = 1, a_1 = 0$. (1 pt = 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25, ou seja, 0,25 por cada coeficiente não nulo achado corretamente, são 3, e 0,25 pelos nulos)

Resposta:

Se $a_1 = 0$ temos pelo item anterior que $a_4 = 0$, $a_7 = \frac{2}{5+2}a_4 = 0$, e $a_{10} = \frac{2}{8+2}a_7 = 0$. Como pelo item (a) $a_2 = 0$, o item anterior implica que $a_5 = \frac{2}{3+2}a_2 = 0$, $a_8 = \frac{2}{6+2}a_5 = 0$. Portanto, os dez primeiros termos da série são

$$a_0 = 1, a_3 = \frac{2}{3}, a_6 = \frac{2}{9}, a_9 = \frac{4}{81}$$

e o resto dos termos até a_{10} são nulos.

d) Determine a expressão geral da solução encontrada no item **c**. (0,5 pt = 0,3 + 0,2)

Resposta:

Como podemos ver no item (c), os índices dos termos não nulos são da forma $3m$ onde m é inteiro. De fato,

$$a_{3m} = \frac{2}{3m} a_{3m-2-1} = \frac{2}{3m} a_{3(m-1)}.$$

Assim, a fórmula geral do termo a_{3m} é

$$a_{3m} = \frac{2^m}{3^m m!}$$

(0,3 pt)

e a solução da equação com $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ é

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^m \frac{x^{3m}}{m!}.$$

(0, 2 pt)