GABARITO G4 de Equações Diferenciais – 2013.2

MAT 1154

Data: 7 de dezembro de 2013

1) Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

a) $(x - y^2)y' = x - y, \quad y(1) = 1.$

Resposta: Sejam $P(x,y) = -x + y$, $Q(x,y) = x - y^2$. Para que a equação diferencial seja exata a igualdade

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

deve ser satisfeita para todo (x,y). Como $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 1$, temos que a igualdade se cumpre. A resolução da equação consiste em achar uma função $g(x,y)$ com valores reais tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

As curvas de nível da função g são as soluções da equação. Fazemos isto em duas etapas.

Etapa 1: Integrar $P(x,y)$ com relação a x.
Pelas igualdades anteriores,

$$g(x,y) = \int_0^x P(t,y)dt + K(y) = \int_0^x (-t+y)dt + K(y) = -\frac{x^2}{2} + yx + K(y).$$

Etapa 2: Derivar g com relação a y para obter $K(y)$.
Como $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x - y^2$ temos que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x + \frac{dK}{dy}(y) = x - y^2$$

o que implica que

$$\frac{dK}{dy}(y) = -y^2$$

para todo y e portanto $K(y) = -\frac{y^3}{3} + L$, onde L é uma constante de integração. Como basta escolher uma função g cujo gradiente seja (P,Q) podemos escolher $L = 0$.

A solução procurada é $g(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} = c$**. Temos a condição** $y(1) = 1$ **temos:**

$$-1/2 + 1.1 - 1/3 = c.$$

Logo $c = 1/6$.

b) $y'' - 2y' + y = e^x + x^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

Resposta:

A parte homogênea da equação, $y'' - 2y' + y = 0$**, tem coeficientes constantes, o polinômio característico é** $q(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ **que tem raízes repetidas**$1, 1$**. Portanto, a solução geral da parte homogênea é** $y_h(x) = Ae^x + Bxe^x$ **onde** A, B **são constantes. A equação admite uma solução particular da forma** $y_{p_1}(x) = (ax^2)e^x$ **pois na parte homogênea já temos** $Ae^x + Bxe^x$. **Os coeficientes podem ser calculados substituindo a expressão de** $y_p(x)$ **na equação encontrando** $a = 1/2$ **A equação admite uma segunda solução particular polinomial da forma** $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. **Os coeficientes podem ser calculados substituindo a expressão de** $y_p(x)$ **na equação:**

1. $a = 1$
2. $b = 4$
3. $c = 6$.

Assim temos:

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + 1/2x^2 + x^2 + 4x + 6.$$

Com as condições iniciais dadas temos: $A = -5$, $B = 1$

2) Considere o sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$**.**

(a) Encontre todos os valores de a **para que a origem seja uma singularidade do tipo espiral repulsor.**

Resposta: Temos que ter autovalores complexos conjugados com parte real positiva.Calculando os autovalores da matriz temos:

$$q(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 2a = 0;\ (1-\lambda)^2 = 2a.$$

Logo $a < 0$.

(b)Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t) + (e^{2t}, e^{2t})$ **onde:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Os autovalores da matriz A **são complexos conjugados** $1+2i, 1-2i$**. A matriz exponencial** e^{tA} **pode ser calculada aplicando**

o teorema do cálculo funcional de matrizes. Como os autovalores são simples, basta achar um polinômio $q(x) = ax+b$ tal que $q(A) = e^{tA}$, $q(1+2i) = e^{(1+2i)t} = a(1+2i)+b$, $q(1-2i) = e^{(1-2i)t} = (1-2i)a+b$. Resolvendo o sistema obtemos

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t cos2t & -e^t sen2t \\ e^t sen2t & e^t cos2t \end{pmatrix}.$$

Temos que a solução geral será:

$$X(t) = X_h(t)(C_1, C_2) + X_p(t).$$

Logo:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t cos2t & -e^t sen2t \\ e^t sen2t & e^t cos2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ae^{2t} \\ Be^{2t} \end{pmatrix}.$$

Calculamos a solução particular que é da forma:

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^t \end{pmatrix}.$$

Derivando e substituindo no sistema temos:

$$\begin{pmatrix} 2Ae^t \\ 2Be^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{2t} \\ Be^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Achamos então $A = -1/5$ e $B = 3/5$. Assim a solução geral é:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t cos2t & -e^t sen2t \\ e^t sen2t & e^t cos2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5e^t \\ 3/5e^t \end{pmatrix}.$$

(c) Ache a solução do sistema da letra (b) com condição inicial $X(0) = (1, 1)$.
Resposta:

Em $t = 0$ teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$

Temos então $C_1 = 6/5$ e $C_2 = 2/5$,logo:

$$X(t) \begin{pmatrix} e^t cos2t & -e^t sen2t \\ e^t sen2t & e^t cos2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5e^t \\ -3/5e^t \end{pmatrix}.$$

3) Decida sobre a convergência das séries abaixo:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nln(n)}{(n+1)^3}$$

Resposta: Por comparação temos:

$$\begin{cases} (n+1)^3 \geq n^3 \\ ln(n) \leq n^{1/2} \\ nln(n) \leq n^{1+1/2} \end{cases},$$

$$\frac{nln(n)}{(n+1)^3} \leq \frac{n^{3/2}}{n^3} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge pois é uma série do tipo $1/n^p$ **com,** $p > 1$ **a série**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nln(n)}{(n+1)^3}$$

converge.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2,2)^n}{n^4}$$

Resposta: Esta série diverge pelo critério da razão: se $a_n = \frac{(2,2)^n}{n^4}$ **temos**

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2,2)^{n+1}}{(n+1)^4} \frac{n^4}{(2,2)^4} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2,2).n^4}{(n+1)^4} = 2,2 > 1. \end{aligned}$$

o qual decorre de que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 1.$

4) Estude a convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{10^n}$$

Resposta:
Pelo teste da razão temos que a série converge para:

$$|x-5|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^{n+1}}\frac{10^n}{1}=|x-5|\frac{1}{10}<1.$$

Logo temos

$$|x-5|<10.$$

Temos que o raio de convergênciaé $\rho = 10$. **E o intervalo de convergência é:**

$$-5<x<15.$$

Analisaremos os extremos -5 **e** 15. **Para verificar se os extremos** $-5, 15$ **do intervalo estão de fato no domínio de convergência da série, substituimos** $x=-5$ **e** $x=15$ **na série. No primeiro caso obtemos:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^n}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Que diverge.
No segundo caso obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-10)^n}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1.$$

Que diverge.
Conclusão: o intervalo de convergência é $(-5, 15)$.

5)Considere a equação diferencial $(x-1)y''-xy'+y=0$. **Sabendo que y(x) =**

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

a) **Determine a relação de recorrência da solução com condições iniciais** $a_0=-2, a_1=6$. **Substituindo a expressão de** $y(x)$ **na equação diferencial multiplicada por** $(x-1)$ **e** $-x$ **obtemos:**

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0.$$

Fazendo as mudanças de indices e somando os coeficientes do termo x^n **temos:**

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}.(n+1)(n)+a_n(1-n)}{(n+2)(n+1)}$$

b) **Determine a forma geral da solução.**

$$y(x)=-2+6x-\frac{2x^2}{2!}-\frac{2x^3}{3!}-\frac{2x^4}{4!}....$$

Que pode ser escrito:

$$y(x) = -2 + 6x - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Pode-se também colocar o termo $2x$ em evidência e temos:

$$Y(x) = 8x - 2e^x$$