Gabarito da G1 de Equações Diferenciais – 2013.2

MAT 1154

1) Encontre a curva $y(x)$ no plano que passa no ponto $(1, 1+e)$ sabendo que:

$$xy'(x) - 2x + y(x) - e^x = 0$$

Resposta:

A equação diferencial é linear não homogênea. Assim, a resolução consta de duas etapas.

1. Resolução da parte homogênea
$$xy'(x) + y(x) = 0,$$
2. Achar uma solução particular ou aplicar o método do fator integrante.

Etapa n. 1

Observamos que a parte homogênea é uma equação separável pois se $x \neq 0$ temos

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

o que implica

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x}.$$

Note-se que a função $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação, e portanto podemos supôr que $x \neq 0$ para obter o resto das soluções. Integrando temos

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

ou seja,

$$ln \mid y(x) \mid = -ln \mid x \mid +C = ln \mid x \mid^{-1} +C,$$

onde C é uma constante de integração. Tomando a exponencial em ambos os lados da equação,

$$|\, y(x) \,| = \frac{K}{|\, x \,|}$$

onde K é novamente uma constante. Isto é a solução geral da parte homogênea, observando que se $K = 0$ recuperamos a solução nula.

Etapa n. 2

Apliquemos o método do fator integrante. Sabemos que a função $y(x) = \frac{1}{x}$ é solução da parte homogênea $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$, dividindo a equação por x temos

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) - 2 - \frac{e^x}{x} = 0.$$

Agora podemos multiplicar a equação pela inversa da solução $y(x) = x$ ou seja, pela função $f(x) = x$ e obtemos

$$fy' + f\frac{y}{x} - 2f - f\frac{e^x}{x} = xy' + y - 2x - e^x = (xy)' - 2x - e^x = 0$$

o que nos permite escrever

$$(xy)' = 2x + e^x$$

e integrar

$$xy(x) = \int (2x + e^x)dx = x^2 + e^x + C$$

onde C é constante de integração. Portanto, a solução geral da equação é

$$y(x) = \frac{C}{x} + x + \frac{e^x}{x}.$$

A curva solicitada no enunciado da questão é o gráfico da solução da equação definida pelas condições iniciais $y(1) = 1 + e$ o que nos permite calcular a constante C:

$$y(1) = C + 1 + e = 1 + e$$

ou seja, $C = 0$ e a solução procurada é $y(x) = x + e^x/x$.

2)Uma colônia de bactérias aumenta sua população a uma taxa proporcional a quantidade de bactérias presente em cada instante de tempo,com população inicial $n(0) = n_0$ segundo a equação diferencial:

$$n'(t) = kn(t), \quad k \in \mathbb{R}$$

a)Encontre a solução geral da equação diferencial.

Resposta:

A equação é linear de ordem 1 com coeficientes constantes, integrando a equação

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = k$$

no intervalo $[0, t]$ obtemos a solução geral

$$n(t) = n(0)e^{kt}.$$

b) Se em 4 horas a população triplica, em quanto tempo ela será 27 vezes o valor inicial.

Resposta:

Consideramos o tempo t em horas, pela hipótese temos que $n(4) = 3n(0)$ pois $n(0)$ é a população no instante inicial. Desta forma calculamos a constante k:

$$n(4) = n(0)e^{k4} = 3n(0)$$

o que implica que $e^{4k} = 3$ ou seja, $k = \frac{ln(3)}{4}$ e a solução

$$n(t) = n(0)e^{\frac{ln(3)}{4}t}.$$

Para obter o tempo solicitado resolvemos a equação

$$n(t) = 27n(0) = n(0)e^{\frac{ln(3)}{4}t}$$

o que implica

$$27 = e^{\frac{ln(3)}{4}t}$$

ou seja,

$$t = ln(27)\frac{4}{ln(3)} = 3ln(3)\frac{4}{ln(3)} = 12.$$

3)

a) Determine o conjunto C dos valores de $a \in \mathbb{R}$ tais que a equação diferencial

$$x''(t) + 4x(t) = sen(at)$$

possui uma solução particular da forma $x_p(t) = Asen(at)$.

Resposta:

Ao substituir a expressão $Asen(at)$ na equação diferencial obtemos

$$-Aa^2sen(at) + 4Asen(at) = sen(at)$$

o que implica que

$$-Aa^2 + 4A = 1,$$

ou seja,

$$A = \frac{1}{4-a^2} = \frac{1}{(2-a)(2+a)}.$$

Concluimos que para qualquer valor $a \neq \{2, -2\}$ existe uma solução particular da forma solicitada. O conjunto C é $\in \mathbb{R} - \{2, -2\}$.

b) Encontre a solução geral da equação diferencial do item anterior quando $a \notin C$.

Resposta:

O polinômio caracteristico da parte homogênea da equação, $x''(t) + 4x(t) = 0$, é $p(x) = x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$. Portanto, as raízes são complexas imaginárias puras, e de módulo 2. A solução geral da parte homogênea é então

$$x_H(t) = \alpha cos(2t) + \beta sen(2t)$$

onde α, β são reais. A solução geral da equação é a soma da solução geral da perte homoênea $x_H(t)$ e a particular:

$$x_p(t) = t(Bcos(at) + Dsen(at)).$$

Pois $a \in \{-2, 2\}$ e a função $Asen(at)$ é uma slução do problema homogêneo.
Ao substituir a expressão $t(Bcos(at)+Dsen(at))$ na equação diferencial obtemos:

$$(-aB)sen(at)+2aDcos(at)+(4B-4B)tcos(at)+(4D-4D)tsen(at) = Asen(at)$$

E como $a \in \{-2, 2\}$, temos:

$$Asen(at) = \pm 4Bsen(at) \pm 4Dcos(at).$$

Concluimos então que :

$$B = \pm A/4$$

e

$$D = 0.$$

Logo:

$$x(t) = \alpha cos(2t) + \beta sen(2t) \pm \frac{Atsen(at)}{4}$$

para

$$a = \pm 2$$

4)Considere a equação diferencial

$$y^2 senxdx + yf(x)dy = 0.$$

a)Determine todas as funções $f(x)$ que tornam exata a equação diferencial.

b)Encontre a solução $g(x, y) = c$ da equação diferencial usando a $f(x)$ achada no ítem a.

Resposta do item (a):

Sejam $P(x, y) = y^2 sen(x)$, $Q(x, y) = yf(x)$. Para que a equação diferencial seja exata a igualdade

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

deve ser satisfeita para todo (x, y). Como $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2ysen(x)$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y\frac{df}{dx}(x)$, temos que a igualdade se cumpre se

$$2ysen(x) = y\frac{df}{dx}(x)$$

para todo (x, y). Ou seja, $\frac{df}{dx}(x) = 2sen(x)$ o que implica que $f(x) = -2cos(x) + A$ para $A \in \mathbb{R}$ é o conjunto de funções procurado.

Resposta do item (b):

A resolução da equação consiste em achar uma função $g(x, y)$ com valores reais tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

As curvas de nível da função g são as soluções da equação. Fazemos isto em duas etapas.

Etapa 1: Integrar $P(x, y)$ com relação a x.
Pelas igualdades anteriores,

$$g(x, y) = \int_0^x P(t, y)dt + K(y) = \int_0^x y^2 sen(t)dt + K(y) = -y^2cos(x) + K(y).$$

Etapa 2: Derivar g com relação a y para obter $K(y)$.
Como $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = yf(x) = y(-2cos(x) + A)$ temos que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2y(cos(x) + A) = -2ycos(x) + \frac{dK}{dy}(y)$$

o que implica que

$$\frac{dK}{dy}(y) = Ay$$

para todo y e portanto $K(y) = \frac{A}{2}y^2 + L$, onde L é uma constante de integração. Como basta escolher uma função g cujo gradiente seja (P, Q) podemos escolher $L = 0$ e assim

$$g(x, y) = -y^2cos(x) + \frac{A}{2}y^2.$$

A solução procurada é $g(x, y) = -y^2cos(x) + \frac{A}{2}y^2 = c.$