Gabarito da G2 MAT1154, 2013/2

1) Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ache a solução geral do sistema $X'(t) = MX(t) + B(t)$ onde $B(t) = (t, 0)$

Resposta:

A resolução do problema tem duas partes. A primeira é achar a matriz e^{tM}, o que explicamos a seguir.

Os autovalores da matriz M são $\lambda_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, portanto complexos. A matriz exponencial e^{tM} pode ser achada aplicando o teorema do cálculo funcional de matrizes. Ou seja, considerando a função $f(x) = e^{tx}$, para achar $f(M)$ basta achar um polinômio $q(x) = ax + b$ tal que

(1) $q(\lambda_1) = f(\lambda_1) = e^{t\sqrt{2}}(cos(t\sqrt{2}) + isen(t\sqrt{2}))$

(2) $q(\lambda_2) = f(\lambda_2) = e^{t\sqrt{2}}(cos(t\sqrt{2}) - isen(t\sqrt{2}))$.

A matriz e^{tM} será $q(M) = aM + bI$. Ao resolver o sistema de equações acima obtemos

$$a = \frac{e^{t\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} sen(t\sqrt{2})$$

$$b = e^{t\sqrt{2}}(cos(t\sqrt{2}) - sen(t\sqrt{2})).$$

Calculando e^{tM},

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} e^{t\sqrt{2}}cos(t\sqrt{2}) & \sqrt{2}e^{t\sqrt{2}}sen(t\sqrt{2}) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{t\sqrt{2}}sen(t\sqrt{2}) & e^{t\sqrt{2}}cos(t\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

A segunda parte da resolução consiste em achar uma solução particular do sistema, o que pode ser feito aplicando o método dos coeficientes a determinar. Procuramos uma solução particular da forma $X_p(t) = (at + b, ct + d)$ dado que a parte não homogênea do sistema é uma função vetorial com coordenadas polinomiais de grau menor ou igual a 1. Substituindo no sistema temos

$$X_p'(t) = (a, c) = MX_p(t) + (t, 0)$$

o que nos da o sistema

$$a = t(a\sqrt{2} + 2c + 1) + b\sqrt{2} + 2d$$

$$c = t(-a + \sqrt{2}c) - b + \sqrt{2}d.$$

Como o lado esquerdo de cada equação é constante temos que os coeficientes dos termos de primeiro grau devem ser nulos, ou seja,

$$a\sqrt{2} + 2c + 1 = 0, \quad -a + \sqrt{2}c = 0,$$

o que implica que $a = \sqrt{2}c$ e substituindo na primeira das equações anteriores obtemos $4c + 1 = 0$, ou seja,

(1) $c = -\frac{1}{4}$

(2) $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Além disso, os termos de grau zero devem ser iguais, ou seja,

$$a = b\sqrt{2} + 2d, \ c = -b + \sqrt{2}d$$

o que implica

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} = b\sqrt{2} + 2d, \ -\frac{1}{4} = -b + \sqrt{2}d.$$

Resolvendo este sistema obtemos

(1) $d = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

(2) $b = 0$.

Portanto, a solução geral do sistema é

$$X(t) = e^{tM}(X_0) + (-\frac{\sqrt{2}}{4}t, -\frac{1}{4}t - \frac{\sqrt{2}}{8})$$

onde X_0 é um vetor constante qualquer.

2)Ache um sistema linear da forma $X'(t) = AX(t)$ onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que admite como soluções as funções vetoriais

$$X_1(t) = e^{2t}(1,1)$$
$$X_2(t) = te^{2t}(1,1) + e^{2t}(1,0).$$

Resposta:

Os dados do problema nos levam a uma matriz A com um único autovetor, 2, e uma única reta de autovetores gerada por $(1,1)$. A matriz não será diagonalizável, e além disso, pela forma da solução $X_2(t)$ sabemos que

$$(A - 2I)(1,0) = (1,1)$$

Ou seja,

$$A(1,0) = 2(1,0) + (1,1) = (3,1).$$

Assim, sabendo a imagem de uma base de vetores podemos calcular os coeficientes da matriz aplicando conhecimentos básicos de álgebra linear: o vetor $A(1,0)$ é a primeira coluna da matriz, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

E a equação $A(1,1) = 2(1,1)$ nos leva a $A(1,0) + A(0,1) = 2(1,1)$ ou seja,

$$A(0,1) = 2(1,1) - (3,1) = (-1,1).$$

que define a segunda coluna da matriz. Concluimos que a matriz que define o sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Outra forma de achar os coeficientes da matriz A é substituindo no sistema $X'(t) = AX(t)$ as expressões das soluções $X_i(t)$, o que nos leva a um sistema de equações satisfeito pelos coeficientes da matriz A.

3) Verdadeiro ou falso com justificativa.

: a) Se os autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ são todos nulos, então as soluções do sistema $X'(t) = AX(t)$ são todas constantes.

Resposta:

Falso, exemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

As soluções do sistema linear homogêneo definido pela matriz são da forma

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$$

onde C é um vetor constante qualquer.

: b) O limite quando $n \to +\infty$ dos coeficientes da matriz

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

é zero se e somente se a matriz é diagonal e $\mid \lambda \mid < 1$.

Resposta:

Verdadeiro. Para achar A^n aplicamos cálculo funcional. Consideramos a função $f(x) = x^n$, e $f(A)$ coincide com um polinômio $q(A)$ calculado na matriz A onde

$$q(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda).$$

Assim,

$$A^n = f(A) = f(\lambda)I + n\lambda(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda c \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Portanto, os coeficientes da matriz A^n tendem a zero se $n \to +\infty$ se e somente se $c = 0$ e $\mid \lambda \mid < 1$.

4)Para cada sistema abaixo, esboce o retrato de fase correspondente e classifique a singularidade $(0, 0)$.

(1) $X'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X(t).$

(2) $X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} X(t).$

Resposta :

Item (1): A matriz que define o primeiro sistema tem traço negativo e determinante positivo, portanto a singularidade é tipo atrator ou poço. O polinômio caracterísitico da matriz é $p(x) = x^2 + 4x + 5$ que tem raíces complexas. Assim, o atrator é complexo, as trajetórias são espirais que giram em torno à origem no sentido horário.

Item (2): A matriz que define o primeiro sistema tem traço positivo e determinante positivo, portanto a singularidade é tipo repulsor ou fonte. O polinômio caracterísitico da matriz é $p(x) = x^2 - 6x + 12$ que tem raíces complexas. Assim, o repulsor é complexo, as trajetórias são espirais que giram em torno à origem no sentido horário.

5)Considere o seguinte modelo que pode ser interpretado como a interação entre duas éspecies.

$$\frac{dx}{dt} = x - 0,5xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0,5y + xy$$

(1) Ache as singularidades do sistema e classifique-as.
(2) Esboce o retrato de fase do sistema.
(3) Quais são as trajetórias que têm limite quando t tende a $+\infty$ e que configuração representam no modelo?

Resposta:

Item (1): As singularidades sãos os zeros simultáneos das funções $f_1(x,y) = x - 0,5xy = x(1-0,5y)$ e $f_2(x,y) = -0,5y + xy = y(-0,5+x)$. Obtemos então $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (\frac{1}{2}, 2)$.

A matriz Jacobiana de $F(x,y) = (x - 0,5xy, -0,5y + xy)$ é

$$DF = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x \\ y & -\frac{1}{2} + x \end{pmatrix}.$$

No ponto $(0,0)$ temos

$$D_{(0,0)}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ou seja, uma sela hiperbólica. No ponto $(\frac{1}{2}, 2)$ temos

$$D_{(\frac{1}{2},2)}F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

a matriz tem traço nulo e determinante positivo, o suficiente para garantir que os autovalores são complexos. Como o traço é o dobro da parte real dos autovalores temos que ambos são imaginários puros, ou seja, o ponto P_2 é um centro.

Item (2): no esboço do retrato de fase do sistema deve ser levado em conta que os eixos cartesianos contém as separatrizes da sela $(0,0)$, ou seja, as soluções do sistema que tendem à sela quando $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. E que todas as trajetórias no primeiro quadrante são fechadas devido a que o sistema admite uma integral primeira e a singularidade tipo centro está contida no primeiro quadrante.

Item (3): A única trajetória do sistema que tem limite é a separatriz contida no eixo vertical que representa as configurações nas quais a população inicial da espécie x é 0. Ditas soluções prevêm a extinção da espécie y ao longo prazo.