Gabarito da P3, 2012.1

Questão 1

Seja $F(x,y,z) = x^3+2y^2+8xz^2-3z^3y$. Temos que $F(-2,2,0) = -8+8 = 0$ e

$\nabla F(x,y,z) = (3x^2+8z^2, 4y-3z^2, 16xz-9z^2y) \Rightarrow \nabla F(-2,2,0) = (12,8,0)$.

Como $\partial_y F(-2,2,0) = 8 \neq 0$, o **Teorema da Função Implícita** garante a existência, numa vizinhança do ponto $(-2,2,0)$, da função implícita $y = f(x,z)$ tal que $2 = f(-2,0)$ e $F(x, f(x,z), z) = 0$.

Além disso,

$$\nabla f(-2,0) = \left(-\frac{\partial_x F(-2,2,0)}{\partial_y F(-2,2,0)}, -\frac{\partial_z F(-2,2,0)}{\partial_y F(-2,2,0)}\right) = (-12/8, -0/8) = (-3/2, 0).$$

Assim, a eq. cartesiana do plano tangente ao gráfico de $y = f(x,z)$ no ponto $(-2,2,0)$ é

$$y = f(-2,0) + \partial_x f(-2,0)(x+2) + \partial_z f(-2,0)(z-0) = 2 - \frac{3}{2}(x+2).$$

Questão 2

Parametrizamos o cilindro usando coordenadas cilíndricas, $(\theta, z) \in D = [0,2\pi] \times [0,1]$,

$$S : \mathbf{r}(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z).$$

O produto vetorial fundamental é

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0),$$

e portanto $||\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|| = 1$. Por definição

$$\iint_S x^2\, z\, dS = \iint_D z \cos^2\theta\, ||\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z||\, d\theta\, dz =$$

$$\Big(\int_0^1 zdz\Big) \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Questão 3

item (a): A superfície é um cone reto invertido, com vértice na origem e altura um, *sem a tampa*, portanto uma superfície aberta. Para aplicar o Teorema da Divergência temos de tampar a superfície, considerando $S \cup S'$ onde $S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$. Agora temos uma superfície fechada que delimita o cone sólido correspondente E e temos:

$$\iint_{S\cup S'} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_E \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = 0,$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = \partial_x(yz) + \partial_y(xz) + \partial_z(xy) = 0$.

Segue então que:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

Mas, em $S' : \mathbf{r}(x,y) = (x,y,1) \Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (0,0,1)$, com (x,y) no disco unitário D. Portanto

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y dxdy = \iint_D xydxdy$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta == \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = 0.$$

Concluimos que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = 0.$$

item (b): Com a orientação pedida, a fronteira do cone é C : $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Então

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_o^{2\pi} (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t\ \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = 0.$$

item (b): Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = 0,$$

pois

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} = (0,0,0),$$

confirmando o resultado do item (b).