Gabarito da G1, MAT1154, 2013-01

1) Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

a) $y' + y = sen(x), \quad y(0) = 1$

Resposta:

A parte homogênea da equação é $y' + y = 0$, cuja solução geral é $y(x) = Ke^{-x}$, K constante. Há várias formas de obter uma solução particular da equação, pelo método dos coeficientes a determinar podemos procurar uma da forma $h(x) = Acos(x) + Bsen(x)$. Substituindo na equação temos

$$(-Asen(x) + Bcos(x)) + (Acos(x) + Bsen(x)) = sen(x)$$

o que implica que $-A + B = 1$ e $A + B = 0$. Ou seja, $B = 1/2$, $A = -1/2$, e a solução particular é $h(x) = -\frac{1}{2}cos(x) + \frac{1}{2}sen(x)$. Assim, a solução geral da equação 'e

$$y(x) = Ke^{-x} + h(x) = Ke^{-x} - \frac{1}{2}cos(x) + \frac{1}{2}sen(x).$$

A solução com condição inicial $y(0) = 1$ é $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}cos(x) + \frac{1}{2}sen(x)$.

b) $cosy + (y^2 - xseny)y' = 0, \quad y(0) = 1$

Resposta:

A equação é exata, pois $P(x, y) = cos(y)$ e $Q(x, y) = y^2 - xsen(y)$ satisfazem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Portanto, existe uma função $H(x, y)$ tal que as curvas de nível de H definem implícitamente as soluções da equação. Para achar H integramos em x,

$$H(x, y) = \int_0^x P(s, y)ds + K(y) = xcos(y) + K(y),$$

e a função $K(y)$ é determinada por

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -xsen(y) + \frac{dK}{dy} = y^2 - xsen(x).$$

O que implica que $K(y) = \frac{y^3}{3}$ é a solução (a menos de constante aditiva) e

$$H(x, y) = xcos(y) + \frac{y^3}{3}.$$

Com a condição inicial $y(0) = 1$ temos $\frac{1}{3} = H(0, 1) = H(x, y)$ e assim a curva de nível que representa a solução é $xcos(y) + \frac{y^3}{3} = \frac{1}{3}$.

c) $y(n + 1) = -0,5y(n) + 6, \quad y(2) = 1$

A parte homogênea da equação em diferenças é $y(n + 1) = -\frac{1}{2}y(n)$, cuja solução geral é $y(n) = (-\frac{1}{2})^n y(0)$. Uma solução particular pode ser encontrada pelo método das constantes a determinar. Procuramos uma solução constante pois a parte não homogênea é constante em n. Se $h(n) = A$ é esta solução, temos

$$A = -\frac{1}{2}A + 6$$

o que implica que $A = 4$. Portanto a solução geral é

$$y(n) = K(-\frac{1}{2})^n + 4,$$

e a solução tal que $y(2) = 1$ é $y(n) = -12(-\frac{1}{2})^n + 4$.

2) Considere uma espécie cuja população $y(t)$ no instante t satisfaz a equação diferencial seguinte:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + y^2$$

a) Se a população inicial $y(0) = 1$, a população tenderá a longo prazo a um valor de equílibrio? Em caso positivo, qual?

Resposta

Observemos em primeiro lugar que a equação tem duas soluções de equilíbrio, $y = 0$ e $y = 2$. As outras soluções podem ser obtidas por integração. A equação diferencial é separável e sua integração envolve frações simples. Podemos escrever

$$\frac{1}{y(y-2)} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2(y-2)},$$

o que implica que

$$\int \frac{dy}{y(y-2)} = -\frac{1}{2} ln \mid y \mid + \frac{1}{2} ln \mid y-2 \mid + C = ln(\mid \frac{y-2}{y} \mid^{1/2}) + C.$$

Portanto, a solução da equação é dada por

$$ln(\mid \frac{y-2}{y} \mid^{1/2}) = \int dt = t + B$$

o que implica

$$\mid \frac{y-2}{y} \mid^{1/2} = Ke^{t}.$$

Como $\mid \frac{y-2}{y} \mid = \mid 1 - \frac{2}{y} \mid$ se $y \neq 0$, temos

$$\mid 1 - \frac{2}{y} \mid = K^2 e^{2t}$$

e portanto $1 - \frac{2}{y} = 1 + K^2 e^{2t}$ ou $1 - \frac{2}{y} = 1 - K^2 e^{2t}$ e assim

$$y(x) = \frac{2}{1(\pm)K^2 e^{2t}}.$$

Considerando a condição inicial $y(0) = 1$ verificamos que o sinal negativo não deve ser considerado na fórmula anterior e a solução procurada é

$$y(t) = \frac{2}{1 + e^{2t}}.$$

Esta função satisfaz $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ e $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 2$, tende aos pontos de equilíbrio. A longo prazo, o limite é 0, o que significa que a população tende à extinção.

b) Se a população inicial $y(0) = 3$, a população tenderá a longo prazo a um valor de equílibrio? Em caso positivo, qual?

Resposta:

Se $y(0) = 3$ vale a fórmula $y(0) = 3 = \frac{2}{1 \pm K^2}$, e vemos que o sinal positivo deve ser descartado. Assim, $3 = \frac{2}{1 - K^2}$ o que implica $K^2 = 1/3$ e a solução satisfaz a fórmula

$$y(t) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{2t}}$$

Observamos que $y(t)$ tem uma assíntota vertical em $t_0 = \frac{ln(3)}{2}$, e que para $t > t_0$ $y(t) < 0$. Portanto, a solução que nos interessa é $y(t)$ para $t < t_0$. Neste caso, $\lim_{t \to t_0} y(t) = +\infty$, e $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 2$. A solução não tende a longo prazo a um ponto de equilibrio, a população tende a explodir no instante $t = t_0$.

3) Considere a equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com $p(x)$ e $q(x)$ funções reais. Sabendo que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ são soluções da equação, determine $p(x)$ e $q(x)$.

Resposta:

Para determinar a equação basta achar as funções $p(x)$ e $q(x)$, o que pode ser feito substituindo as soluções x e x^2 na equação. Substituindo x temos:

$$p(x) + q(x)x = 0$$

o que implica que $p(x) = -xq(x)$. Substituindo x^2 temos

$$2 + p(x)(2x) + q(x)x^2 = 0$$

e como $p(x) = -xq(x)$ concluimos que

$$2 - 2x^2q(x) + q(x)x^2 = 2 - x^2q(x) = 0$$

e portanto $q(x) = \frac{2}{x^2}$ e $p(x) = -\frac{2}{x}$.

4) Considere a equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = 0$.

a) Determine a, b e c tais que as funções $y_1(x) = e^{2x}cosx$ e $y_2(x) = e^{2x}senx$ sejam as soluções da equação.

Resposta:

As funções são respectivamente a parte real e a parte imaginária da exponencial complexa $e^{(2+i)x}$. Assim, as funções são uma base das soluções de uma equação linear $y'' + by' + cy = 0$ com coeficientes constantes cujo polinômio caracteristico $p(x)$ tem raízes complexas $\lambda = 2 + i$, $\bar{\lambda} = 2 - i$. O polinômio tem os mesmos coeficientes da equação, $p(x) = x^2 + bx + c$ e pelas raizes complexas sabemos que $b = -2Re(\lambda)$, $c =| \lambda |^2$, onde $Re(\lambda) = 2$ é a parte real de λ e $| \lambda |^2 = 5$ é o quadrado do módulo de λ. Portanto a equação procurada é

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

b) Encontre a solução geral da equação $ay'' + by' + cy = x$

Resposta:

Procuramos primeiro uma solução particular polinomial de grau 1 $q(x) = Ax + B$. Substituindo na equação temos

$$q'' - 4q' + 5q = -4A + 5(Ax + B) = 5Ax + (5B - 4A) = x$$

o que implica que $5A = 1$, ou seja, $A = 1/5$, e $5B - 4A = 0$, ou seja, $B = 4/25$. Portanto, a solução geral é

$$y(x) = C_1 e^{2x} cosx + C_2 e^{2x} senx + \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}.$$