Gabarito da G2 de Equações Diferenciais – 2013.1

MAT 1154

1) Ache a solução geral do sistema em diferenças finitas $X_{n+1} = BX_n$ onde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

.

Resposta:

A matriz tem único autovalor 2 e o subespaço dos autovetores tem dimensão 1. Portanto, a matriz não é diagonalizável e a solução $X_n = B^n$ pode ser calculada de duas formas. A primeira, mais fácil, é calcular $f(B) = B^n$ usando o polinômio de Taylor de grau 1 de $f(x) = x^n$ centrado em $x_0 = 2$, ou seja, $f(B) = f(2)I + f'(2)(B - 2I)$, isto nos dá

$$f(B) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & 2+n \end{pmatrix}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido aplicando cálculo funcional de matrizes, achando um polinômio $q(x) = ax + b$ tal que $q(2) = f(2) = 2^n$, $q'(2) = n2^{n-1} = f'(2)$. Os coeficientes a, b são

$$a = n2^{n-1},\ b = 2^{n-1}(1-n)$$

e substituindo $q(A) = aA + bI$ obtem-se o resultado anterior.

2) Considere o sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X(t)$.

(a) Esboce o retrato de fase e classifique a singularidade $(0,0)$.

Resposta:

A matriz tem autovalores complexos $-2+i$, $-2-i$ com parte real negativa. Portanto, a singularidade é um atrator ou poço hiperbólico. Observamos também que a matriz é da forma

$$A = -2I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuja exponencial então é da forma

$$e^{tA} = e^{-2t} \begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

o que implica que as soluções do sistema são espirais que tendem a 0 no futuro e giram no sentido horário conforme o tempo aumenta.

(b) Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t) + (-1, t)$ onde:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

A solução geral do sistema é $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$ onde X_h é a solução geral da parte homogênea do sistema, ou seja,

$$X_h(t) = e^{tA}v$$

onde $v \in \mathbb{R}^2$, e $X_p(t) = \frac{1}{5}(t - \frac{14}{5}, 2t + \frac{2}{5})$ pode ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar. Ou seja, supondo que existe uma solução particular do tipo $X_p(t) = (at + b, ct + d)$ com a, b, c, d constantes que são determinadas substituindo a expressão de $X_p(t)$ no sistema.

(c) Ache a solução do sistema da letra **(b)** com condição inicial $X(0) = (1, 1)$.

Resposta:

A solução é $X(t) = e^{tA}v + X_p(t)$ com $v = (\frac{14}{25}, \frac{39}{25})$.

3) Considere o sistema linear $X'(t) = AX(t)$ onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de a, b para os quais:

(I) As soluções do sistema satisfazem

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = (0, 0)$$

.

(II) A singularidade $(0,0)$ é uma sela hiperbólica.

Resposta:

O polinômio caracteristico da matriz que define o sistema é $p(x) = x^2 - 2x + 1 - ab$, suas raízes são $\lambda_1 = 1 + \sqrt{ab}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{ab}$. Portanto, se a e b são não nulos e tem sinais opostos as raízes são complexas com parte real positiva. O ponto $(0,0)$ é um repulsor ou fonte e toda solução se afasta de $(0,0)$ se t aumenta. Se $a = 0$ ou $b = 0$ o sistema tem um único autovalor $\lambda = 1$ e $(0,0)$ continua sendo um repulsor. Assim, nos resta analisar o caso em que a e b são não nulos e tem o mesmo sinal. Os autovalores são diferentes, e um deles é sempre positivo. Aparece um autovalor negativo quando $\lambda_2 = 1 - \sqrt{ab} < 0$, ou seja, quando $1 < \sqrt{ab}$. Portanto, a resposta ao item I é que não existem valores que satisfazem a condição, e a resposta do item II é $ab > 1$.

4) Considere o problema abaixo que representa o comportamento de duas espécies(com densidades populacionais $x(t)$ e $y(t)$).

$$\frac{dx}{dt} = x(0,5 - 1,5y)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = y(-1,5 + x)$$

a)Determine as singularidades e classifique-as.

Resposta:

O sistema pode ser escrito na forma $X'(t) = F(X(t))$ onde $F(x,y) = (\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xy, -\frac{3}{2}y + yx)$. As singularidades são os pontos onde $F(x,y) = (0,0)$, ou seja, $(0,0)$ e $(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$. A matriz Jacobiana de F é

$$D_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y & -\frac{3}{2}x \\ y & -\frac{3}{2} + x \end{pmatrix}.$$

Portanto, em $(0,0)$ a matriz Jacobiana é

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

caracterizando $(0,0)$ como uma sela hiperbólica, e em $(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz tem traço nulo e determinante positivo, o que implica que os autovalores devem ser complexos com parte real 0 já que o traço é duas vezes a parte real do autovalor complexo. Portanto, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$ é um centro.

b) Esboce as trajetórias do sistema no primeiro quadrante.

Resposta:

Os eixos são trajetórias do sistema, são as separatrizes da sela hiperbólica. Isto pode ser verificado diretamente no sistema. O resto das trajetórias do primeiro quadrante são fechadas pois o sistema admite uma integral primeira obtida pela integração da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{3}{2}y + yx}{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xy}.$$

Toda trajetória fechada limita uma região que contém a singularidade tipo centro.

c) Suponha que as populações iniciais em um laboratório sejam $x(0) = 10$ e $y(0) = 1$. Interprete a evolução das populações no tempo t.

Resposta:

As coordenadas da condição inicial são ambas positivas, o que significa que a trajetória asociada é fechada. Ou seja, existe um $T > 0$ tal que se $X(t)$ é esta trajetória, tem-se que $X(t+T) = X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto implica que a evolução das duas espécies é periódica no tempo, sem que nenhuma delas desapareça.