Gabarito da G3 de Equações Diferenciais – 2013.1

MAT 1154

Ques.	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**2.a**	**2.b**	**3**	**4**	**5.a**	**5.b**	**soma**
Valor	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	10.0
Nota										

1) Considere o problema abaixo que representa o comportamento de duas espécies(com densidades populacionais $x(t)$ e $y(t)$)competindo por suprimentos comuns.

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1,5 - y - x)$$

a)Determine as singularidades e classifique-as.

Resposta:

As singularidades do sistema correspondem aos zeros da função $F(x, y) = (x(1 - x - y), y(1, 5 - y - x))$. São os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$. Note que as retas $1 - x - y = 0$ e $1, 5 - y - x = 0$ não tem interseção pois são paralelas.

A classificação das singularidades é feita calculando os autovalores da matriz jacobiana de $F(x, y)$ em cada singularidade. A matriz é

$$D_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -y & \frac{3}{2} - 2y - x \end{pmatrix}.$$

Avaliando em cada singularidade temos

$$D_{(0,0)}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

o que implica que $(0, 0)$ é uma fonte,

$$D_{(1,0)}F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

pelo que $(1,0)$ é uma sela hiperbólica, e

$$D_{(0,\frac{3}{2})}F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

e portanto $(0,\frac{3}{2})$ é um atrator ou poço.

b) Esboce as trajetórias em uma vizinhança de cada singularidade no primeiro quadrante.

Resposta:

É importante notar que os eixos são trajetórias do sistema que contém separatrizes das selas hiperbólicas.

c) Para quais condições iniciais existe uma configuração de equilíbrio na qual nenhuma espécie desaparece , e qual é esta configuração?

Resposta:

Não existe nenhuma condição inicial na qual as duas espécies tendem a uma configuração assintótica em que ambas sobrevivem, pois as singularidades do sistema ficam nos eixos e os conjuntos limites das trajetórias do sistema são as singularidades (o sistema não tem trajetórias fechadas).

Ou seja, uma das coordenadas do conjunto limite de qualquer trajetória é zero o que é equivalente ao desaparecimento assintótico de uma das espécies.

2) Decida sobre a convergência das séries abaixo:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\ln(n)}{2^n}$$

Resposta:

Esta série de constantes converge pelo critério da razão: se $a_n = \frac{n\ln(n)}{2^n}$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{n}\frac{ln(n+1)}{ln(n)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})\frac{ln(n+1)}{ln(n)} = \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

o qual decorre de que $\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(n+1)}{ln(n)} = 1$ pela regra de L'Hôpital (observe que é um limite indeterminado do tipo $\frac{\infty}{\infty}$).

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

Esta série converge pelos critérios de comparação e da integral. Note em primeiro lugar que $\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 1$. Portanto, se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ também converge. Além disso, se a integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ é finita então a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge. Mas esta integral é

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{T\to+\infty}\int_1^{T}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{T\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^T = \lim_{T\to+\infty}(1-\frac{1}{T}) = 1.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$, e a segunda série na soma converge pelo critério de comparação, então a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ converge.

3) Determine o intervalo de convergência das séries abaixo:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Resposta:

O raio de convergência é $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ onde $a_n = n!$. Ou seja,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Portanto, o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n.4^n}$$

Resposta:

O raio de convergência da série é $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ onde $a_n = \frac{1}{n4^n}$. Este limite é

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)4^{n+1}}{n4^n} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 4.$$

Como a expansão da série é centrada no ponto $x_0 = 2$ o intervalo de convergência é um dos seguintes:

$$(-2,6),\ [-2,6),\ [-2,6],\ (-2,6].$$

Para verificar se os extremos $-2, 6$ do intervalo estão de fato no domínio de convergência da série, substituimos $x = -2$ e $x = 6$ na série. No primeiro caso obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que diverge pelo critério da integral. No segundo caso, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que é uma série alternada com termo geral de módulo decrescente e tendendo a zero se $n \to \infty$. Assim, aplicando o critério das séries alternadas a série converge. Conclusão: o intervalo de convergência é $(-2, 6]$.

4) Calcule o termo geral da expansão em série de potências de $(x-1)$ da função abaixo e ache seu intervalo de convergência.

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 15}$$

Resposta:

Temos que $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$ e

$$\frac{1}{x^2 - 8x + 15} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{5-x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2-(x-1)} - \frac{1}{4-(x-1)}).$$

Pela fórmula da progressão geométrica temos

$$\frac{1}{a-(x-1)} = \frac{1}{a}(\frac{1}{1-\frac{(x-1)}{a}}) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(x-1)}{a})^n$$

cada vez que $\mid x-1 \mid < a$, e aplicando a fórmula acima à função $y(x)$ temos

$$y(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}),$$

no intervalo $\mid x-1 \mid < 2$. Desta forma, temos que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ onde

$$a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}) = \frac{1}{2^{n+2}}(1 - \frac{1}{2^{n+1}})),$$

sempre que $\mid x-1 \mid < 2$.

O raio de convergência da série é 2, o intervalo de convergência está centrado em $x_0 = 1$ e coincide com um dos seguintes: $(-1,3), (-1,3], [-1,3), [-1,3]$. Substituindo $x = -1$ nas série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)}{2})^n$ obtemos uma série alternada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}$ divergente, e ao substituir $x = 3$ na mesma série obtemos uma série de termos constantes iguais a 1, que diverge. Portanto, o intervalo de convergêcia de $y(x)$ é $(-1, 3)$.

5)

a) Considere a equação diferencial $y'' - xy' - y = 0$. Ache a expressão geral de uma solução em forma de série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

supondo que $a_1 = 0$.

Resposta:

Substituindo a expressão de $y(x)$ na equação diferencial obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Multiplicando a segunda série por x,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

e mudando o índice da primeira série $k = n - 2$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Somando os coeficientes do termo x^k temos

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - ka_k - a_k = (k+1)((k+2)a_{k+2} - a_k) = 0,$$

o que nos da a seguinte fórmula de recorrência

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{k+2}$$

para todo $k \geq 1$ (a segunda série não tem termo de grau 0). Para $k = 0$ temos $2.1a_2 - a_0 = 0$ ou $a_2 = \frac{a_0}{2}$. Verificamos assim que toda vez que k

é ímpar, a_{k+2} resulta ser múltiplo de $a_1 = 0$ por hipótese. Desta forma, $a_n = 0$ se n é ímpar, e

$$a_n = a_{2m} = \frac{a_0}{2^m m!}$$

se $n = 2m$ é par.

b) Considere agora a equação diferencial $y'' - xy' - y = 1$. Ache a solução em forma de série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

supondo que $a_0 = a_1 = 0$.

Resposta:

Aproveitando os cálculos feitos no item (1), a equação diferencial implica que o termo de grau 0 da série que representa $y(x)$, ou seja, $2a_2 - a_0$ deve ser igual a 1. Como $a_0 = 0$, obtemos $a_2 = \frac{1}{2}$, e o resto dos termos da série de $y(x)$ satisfazem a relação de recorrência do item (1). Sendo $a_1 = 0$, o resultado é $a_n = 0$ para todo n ímpar e $a_n = a_{2m} = \frac{1}{2^m m!}$ para todo $n = 2m$.