G4 de Equações Diferenciais – 2013.1

MAT 1154

Data: 3 de Julho de 2013

Nome:______________________________ Matrícula:__________
Assinatura:__________________________ Turma:__________

Duração: 1 hora 50 minutos

Ques.	**1.a**	**1.b**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**4.a**	**4.b**	**5.a**	**5.b**	**5.c**	**soma**
Valor	1.0	1.0	0.5	1.0	0.5	1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	0.5	10.0
Nota														

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- Escreva de forma clara, ordenada e legível.
- O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta** no lugar a ele destinado. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!.**

Observação

- **Justifique cuidadosamente** todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.*

fonte: mini-Aurélio

1) Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

a) $xy' + 2y = sen(x), \quad y(\pi/2) = 1$

b) $y'' + 2y' + 1 = x^2, \quad y(0) = 1$

2) Considere o sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$.

(a) Esboce o retrato de fase e classifique a singularidade $(0,0)$.

(b) Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t) + (e^t, e^t)$ onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Ache a solução do sistema da letra **(b)** com condição inicial $X(0) = (1,1)$.

3) Considere o problema abaixo que representa o comportamento de duas espécies(com densidades populacionais $x(t)$ e $y(t)$).

$$\frac{dx}{dt} = x(0,5 - 0,5y)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = y(-1 + x)$$

a)Determine as singularidades e classifique-as.

b)Esboce as trajetórias do sistema no primeiro quadrante.

c)Suponha que as populações iniciais em um laboratório sejam $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$. Interprete a evolução das populações no tempo t.

4) Decida sobre a convergência das séries abaixo:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n .(n^2).5^n}{(7^n)}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

5)

Considere a equação diferencial $y'' + (1 - x^2)y = 0$.

a) Mostre que para toda solução em série $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $a_1 = 0$ tem-se que $a_n = 0$ para todo n ímpar.

b) Mostre que para todo n par tem-se a relação $a_{n+2} = -a_n/n$.

c) Qual é a solução da equação que satisfaz $a_0 = 1$, $a_1 = 0$?