# Gabarito da G4 de Equações Diferenciais – 2013.1

MAT 1154

| **Ques.** | **1.a** | **1.b** | **1.c** | **2.a** | **2.b** | **3.a** | **4.a** | **4.b** | **teste** | **soma** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valor** | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 2.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 10.0 |
| **Nota** | | | | | | | | | | |

**1)** Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

**a)** $xy' + 2y = sen(x), \quad y(\pi/2) = 1$

**Resposta:**
Reescrevendo a equação temos : $y' + (2/x)y = sen(x)/x$.

Usando fator integrante temos:
$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}} dx -> \mu(x) = e^{lnx^2}$. Assim: $\mu(x) = x^2$.
Temos então que a solução geral será:

$$y(x) = \frac{\int xsen(x)dx + C}{x^2}$$

,

$$y(x) = -cos(x)/x + sen(x)/x^2 + C/x^2$$

Com a condição inicial $y(\pi/2) = 1$ teremos:

$$1 = -cos(\pi/2)/(\pi/2) + sen(\pi/2)/(\pi/2)^2 + C/(\pi/2)^2$$

, temos:

$$C = \pi^2/4 + 1.$$

**b)** $y'' + 2y' + 1 = x^2, \quad y(0) = 1$

**Resposta:**
A parte homogênea da equação, $y'' + 2y = 0$, tem coeficientes constantes, o polinômio característico é $q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2)$ que

tem raízes $0, -2$. Portanto, a solução geral da parte homogênea é $y_h(x) = A + Be^{-2x}$ onde $A, B$ são constantes. A equação admite uma solução particular polinomial da forma $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pois o termo não homogêneo é polinomial de grau 2, e do lado esquerdo da equação temos a soma de uma segunda derivada mais uma primeira derivada, para que esta operação aplicada a um polinômio $y_p(x)$ tenha como resultado um polinômio de grau 2 o polinômio deve ter grau pelo menos 3. Os coeficientes podem ser calculados substituindo a expressão de $y_p(x)$ na equação:

1. $a = \frac{1}{6}$
2. $b = -\frac{1}{4}$
3. $c = -\frac{1}{4}$
4. $d = 0$ ou qualquer constante.

**2)** Considere o sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$.

**(a)** Esboce o retrato de fase e classifique a singularidade $(0, 0)$.

**Resposta:**

A matriz tem traço 2 e determinante $-3$. Por ser simétrica, seus autovalores são reais e portanto deve ter um autovalor real positivo e um negativo. O ponto $(0, 0)$ é uma singularidade tipo sela.

**(b)**Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t) + (e^t, e^t)$ onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:**

Os autovalores da matriz $A$ são $-1, 3$. A matriz exponencial $e^{tA}$ pode ser calculada aplicando o teorema do cálculo funcional de matrizes. Como os autovalores são simples, basta achar um polinômio $q(x) = ax + b$ tal que $q(A) = e^{tA}$, $q(-1) = e^{-t} = a(-1) + b$, $q(3) = e^{3t} = 3a + b$. Resolvendo o sistema obtemos

1. $a = \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t})$

2. $b = \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t})$.

Assim, $e^{tA} = \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t})A + \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t})I$, o que nos da

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Temos que a solução geral será:

$$X(t) = X_h(t)(C_1, C_2) + X_p(t).$$

Logo:

$$X(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^t \end{pmatrix}.$$

Calculamos a solução particular que é da forma:

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^t \end{pmatrix}.$$

Derivando e substituindo no sistema temos:

$$\begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Achamos então $A = -1/2eB = -1/2$. Assim a solução geral é:

$$X(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2e^t \\ -1/2e^t \end{pmatrix}.$$

**(c)** Ache a solução do sistema da letra **(b)** com condição inicial $X(0) = (1, 1)$.

**Resposta:**

Em $t = 0$ teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Temos então $C_1 = 3/2$ e $C_2 = 3/2$,logo:

$$X(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2e^t \\ -1/2e^t \end{pmatrix}.$$

**3)** Considere o problema abaixo que representa o comportamento de duas espécies(com densidades populacionais $x(t)$ e $y(t)$).

$$\frac{dx}{dt} = x(0,5 - 0,5y)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = y(-1 + x)$$

**a)**Determine as singularidades e classifique-as.

**Resposta:**

As singularidades são $(0,0)$ e $(1,1)$. O sistema é quase-linear $X'(t) = F(X(t))$ onde $F(x,y) = (x(0,5 - 0,5y), y(-1 + x))$ e a diferencial de $F$ é

$$D_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x \\ y & -1 + x \end{pmatrix}.$$

Portanto temos

$$D_{(0,0)}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

o que caracteriza $(0,0)$ como uma sela hiperbólica, e

$$D_{(1,1)}F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tem traço nulo e determinante positivo. Desta forma, os autovalores devem ser complexos com parte real nula, ou seja, $(1,1)$ é uma singularidade tipo centro.

**b)**Esboce as trajetórias do sistema no primeiro quadrante.

**Resposta:**

Notando que os eixos são trajetórias do sistema que conté as separatrizes da sela $(0,0)$, e que o sistema tem uma integral primeira obtida como solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(0,5 - 0,5y)}{y(-1 + x)}$$

temos que todas as trajetórias no interior do primeiro quadrante são fechadas e a evolução no tempo de toda solução orienta as trajetórias no sentido anti-horário.

**c)** Suponha que as populações iniciais em um laboratório sejam $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$. Interprete a evolução das populações no tempo $t$.

**Resposta:**

O ponto $(1, 1)$ é um ponto estacionário do sistema, portanto as populações permanecerão constantes no tempo.

**4)** Decida sobre a convergência das séries abaixo:

**a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.(n^2).5^n}{(7^n)}$

**Resposta:**

Tomando o módulo dos coeficientes da série e aplicando o critério do quociente,

$$\frac{| a_{n+1} |}{| a_n |} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{5}{7} = (1 + \frac{1}{n})^2\frac{5}{7}$$

cujo limite é $\frac{5}{7}$ que é menor que 1. Portanto, a série converge absolutamente.

**b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

**Resposta:**

Observamos que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$ o que implica que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ diverge pelo critério da integral, e portanto a série inicial diverge pelo critério de comparação: ela é maior que uma série divergente.

**5)**

Considere a equação diferencial $y'' + (1 - x^2)y = 0$.

**a)** Mostre que para toda solução em série $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $a_1 = 0$ tem-se que $a_n = 0$ para todo $n$ ímpar.

**Resposta:**

Escrevendo a solução em forma de série de potências $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e substituindo na equação diferencial,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

e fazendo na primeira série $n - 2 = k$, e na terceira $n + 2 = k$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = 0.$$

Para $k \geq 2$ a soma dos termos de grau $k$ é

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k - a_{k-2} = 0,$$

o que implica que

$$a_{k+2} = \frac{a_{k-2} - a_k}{(k+2)(k+1)}.$$

Portanto, os termos de grau ímpar são função dos termos de grau ímpar, e os termos de grau par so dependem dos termos de grau par. Para $k = 0$ temos

$$2.1a_2 + a_0 = 0$$

ou seja, $a_2 = -\frac{1}{2}a_0$. Para $k = 1$ temos

$$3.2a_3 + a_1 = 0$$

e como $a_1 = 0$ temos $a_3 = 0$ e todos os coeficientes de termos de grau ímpar são nulos pois dependem de $a_1$ e $a_3$ de acordo com a fórmula de recorrência.

**b)** Mostre que para todo $n$ par tem-se a relação $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$.

**Resposta:**

Como observamos no item anterior temos $a_0 = -2a_2$.

Para $k = 4$ temos

$$a_4 = a_{2+2} = \frac{a_0 - a_2}{(4)(3)} = \frac{-2a_2 - a_2}{(4)(3)} \frac{-3a_2}{(4)(3)} = \frac{-a_2}{4},$$

e portanto $a_2 = -4a_4$. para $k = 6$ temos

$$a_6 = a_{4+2} = \frac{a_2 - a_4}{(6)(5)} = \frac{-4a_4 - a_4}{(6)(5)} = \frac{-5a_4}{(6)(5)} = \frac{-a_4}{6}.$$

Para todo $k$ par maior ou igual a 2 obtemos então por indução que

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2}$$

como afirma o enunciado.

**c)** Quá é a solução da equação que satisfaz $a_0 = 1$, $a_1 = 0$?

**Resposta:**

Aplicando os resultados dos items anteriores a solução é

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$