Questão n. 1

Resolva os seguintes problemas de equações diferenciais:

a) Ache a solução da equação $ysen(x)dx - cos(x)dy = 0$ que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$.

Resposta:
A equação é separável,

$$ysen(x)dx = cos(x)dy \Longrightarrow \frac{sen(x)}{cos(x)}dx = \frac{1}{y}dy.$$

Integrando obtemos

$$-ln(cos(x)) = ln(y) + C \Longrightarrow y(x) = -\frac{K}{cos(x)}.$$

A solução que satisfaz $y(1) = 2$ é definida por $2 = y(1) = -\frac{K}{cos(1)}$, ou seja, $K = -2cos(1)$ e $y(x) = \frac{2cos(1)}{cos(x)}$.

b) Ache a solução geral de $y''(x) + y'(x) + y(x) = 2e^{-x}$.

Resposta:

O polinômio caracteristico da parte homogênea da equação é $x^2 + x + x$. Suas raizes são $a = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $b = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ambas complexas com parte real negativa. Portanto, uma base para o espaço das soluções da parte homogênea é

$$y_1(x) = e^{\frac{-1}{2}x}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x),\ y_2(x) = e^{\frac{-1}{2}x}sen(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Uma solução particular da equação é da forma $f(x) = Ae^{-x}$, substituindo na equação temos

$$A - A + A = 2 \Longrightarrow A = 2.$$

Portanto a solução geral da equação é

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + 2,$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias.

Questão n. 2

a) Ache um sistema linear da forma $X'(t) = AX(t)$ onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que admite como soluções as funções vetoriais

$$X_1(t) = e^t(1,1)$$
$$X_2(t) = te^t(1,1) + e^t(1,0).$$

Resposta:

Pela forma da solução X_1 sabemos que 1 deve ser autovalor de A e que $(1,1)$ deve ser autovetor. Isto implica que os coeficientes de A satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$a + b = 1, \ c + d = 1.$$

Substituindo $X_2(t)$ no sistema linear $X'(t) = AX(t)$ obtemos

$$X_2'(t) = e^t(1,1) + te^t(1,1) + e^t(1,0) = A(X_2(t)) = A(te^t(1,1) + e^t(1,0).$$

A identidade anterior se traduz em um sistema de equações para as componentes horizontal e vertical de ambos os lados da equação:

$$2e^t + te^t = ae^t + te^t$$

$$e^t + te^t = ce^t + te^t$$

do qual deduzimos que $a = 2$ e $c = 1$. Portanto, como $a + b = 1$ temos que $b = -1$ e como $c + d = 1$ temos $d = 0$. Assim, a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ache uma solução particular do sistema $X'(t) = AX(t) + B(t)$, onde $B(t) = (0, 2t)$.

Resposta:

O sistema admite uma solução particular $Y(t)$ da mesma forma da função $B(t)$, ou seja, $Y(t) = (vt + w, zt + l)$ onde v, w, z, l são constantes a determinar. Substituindo no sistema temos

$$Y'(t) = (v, z) = AY(t) + B(t) = ((2v - z)t + 2w - l, vt + w) + (0, 2t).$$

O que fornece um sistema de equações para as constantes consideradas:

$$2v - z = 0$$
$$v = 2w - l$$
$$v + 2 = 0$$
$$z = w$$

Da terceira equação deduzimos que $v = -2$, $z = -4 = w$ e que $-2 = -8 - l$, ou seja, $l = -6$. Portanto, $Y(t) = (-2t - 4, -4t - 6)$.

c) Calcule a matriz $M^{50} - 3M$ onde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resposta:

A matriz M tem polinômio caracteristico $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ e portanto, o valor de $Q(M) = M^{50} - 3M$ calculado é dado, pelo teorema do cálculo funcional de matrizes, pelo valor do polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(s) = s^{50} - 3s$ centrado no ponto $x_0 = 1$, $H(s) = f(1) + f'(1)(s-1) = -2 + (50-3)(s-1)$, ou seja,

$$Q(M) = -2I + 47(M - I) = \begin{pmatrix} -2 & 47 \\ -47 & 92 \end{pmatrix}.$$

Questão n. 3

Considere o seguinte modelo de duas espécies em competição

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1,5 - y - x)$$

a) Ache as singularidades do sistema e classifique-as.

Resposta:

As singularidades do sistema são $(0,0)$, $(0,3/2)$, $(1,0)$ (observe que as retas $1 - x - y = 0$ e $1,5 - y - x = 0$ são paralelas). O ponto $(0),0$ é uma fonte ou repulsor, o ponto $(0,3/2)$ é um atrator e o ponto $(1,0)$ é uma sela.

b) Faça um esboço do conjunto dos pontos do primeiro quadrante onde alguma das componentes do campo de direções do sistema se anula. Nestes pontos, indique a direção da componente que não se anula.

Resposta:
O campo de direções tem componentes horizontais nulas nos pontos da reta $1-x-y=0$, e as componentes verticais do campo nestes pontos são positivas. As componentes verticais são nulas nos pontos da reta $1,5-y-x=0$ e as componentes horizontais são negativas (ver figura).

c) Existe alguma configuração inicial das duas populações cuja evolução assintótica garanta que nenhuma das duas desapareçe?

Resposta:

Não, o limite de toda solução é um dos pontos singulares, todos tem pelo menos uma coordenada nula e portanto, uma das populações sempre tende a desaparecer.

Questão n. 4 cada uma das Ache uma expressão em série de potêcias de x para as seguintes funções e ache o intervalo de convergêcia em cada caso.

a) $y(x) = \frac{1}{x^2-7x+1)}$

Resposta:

Tem-se que $p(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$ e que
$$\frac{1}{x^2-7x+1)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}).$$
Escrevendo
$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{a}(\frac{1}{\frac{x}{a}-1}) = -\frac{1}{a}(\frac{1}{1-\frac{x}{a}})$$
obtemos a seguinte expansão
$$S(x) = \frac{1}{a}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{a})^n)$$
com raio de convergência a e intervalo de convergência $(-a, a)$. Na interseção dos intervalos de convergência das séries que representam $\frac{1}{x-5}$ e $\frac{1}{x-2}$ podemos somar termo a termo os coeficientes de ambas as séries, o que permite afirmar que
$$y(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{5})^n + \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n))) = \sum \frac{1}{3}(\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}})x^n$$
é a série que representa $y(x)$. Ou seja, o coeficiente a_n da expansão $y(x) = \sum a_n x^n$ é $a_n = \frac{1}{3}(\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}})$, e o intervalo de convergêcia da série é a interseção dos intervalos das duas séries envolvidas: $(-2, 2)$.

b) $y(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}dt$

Resposta:

A série de Taylor de $f(x) = e^x$ é
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
substituindo $x = -t^2/2$ temos
$$f(-t^2/2) = \sum (-1)^n \frac{t^n}{2^n n!}.$$
Integrando termo a termo no intervalo de convergência (que é $\mathbb{R}$) obtemos
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)!} x^{n+1}.$$

Questão n. 5

Considere a solução geral em série de potências $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ da equação diferencial

$$y''(x) - 2x^2 y(x) = 0$$

a) Qual é o conjunto dos índices n tais que $a_n = 0$ para toda solução?

Resposta:

Substituindo a série na equação diferencial obtem-se

$$\sum_2^\infty (n)(n-1)a_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_2^\infty (n)(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_0^\infty 2a_n x^{n+2} = 0.$$

Fazendo $k = n-2$ na primeira série e $k = n+2$ na segunda série temos

$$\sum_0^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_2^\infty 2a_{k-2}x^k = 0$$

Observemos que a segunda série não tem termos de grau 0 ou 1, pelo que os termos destes graus na soma de séries acima são os termos da primeira série. Isto implica que

$$2.1a_2 = 0$$

e

$$3.2a_3 = 0$$

A partir do termo de grau 3 da soma das séries, temos a seguinte fórmula de recorrência:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2a_{k-2} = 0,$$

o que implica

$$a_{k+2} = \frac{2}{(k+2)(k+1)}a_{k-2}.$$

Mudando novamente os índices, $j = k-2$, temos

$$a_{j+4} = \frac{2}{(j+4)(j+3)}a_j.$$

Portanto, cada vez que j fôr da forma $j = 4N+2$ ou $j = 4N+3$ onde N é um inteiro, o coeficiente a_j será um múltiplo de a_2 ou a_3 e assim será nulo. O resto dos termos dependerá dos valores de a_0 e a_1 que são arbitrários.

b) Responda a questão do item anterior para a equação diferencial

$$y''(x) - 2x^m y(x) = 0$$

onde $m \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Substituindo a série na equação, o raciocínio do item anterior mostra que os termos até ordem $m-1$ da soma das séries

$$\sum_0^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_m^\infty 2a_{k-m}x^k = 0$$

são os termos da primeira série. Portanto, os m termos $a_2, a_3, ..a_{m+1}$ são nulos, e a fórmula de recorrência

$$a_{k+2} = \frac{2}{(k+2)(k+1)} a_{k-m}$$

indica que fazendo $j = k - m$ obtemos

$$a_{j+m+2} = \frac{2}{(j+4)(j+3)} a_j.$$

Análogo ao item anterior, cada vez que $j = (m+2)N + i$, onde $i = 2, 3, .., m+1$, o coeficiente a_j será nulo.

c) Ache os primeiros 10 termos da solução $f(x)$ de $y''(x) - 2x^2y(x) = 0$ que satisfaz $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Escreva se possível a fôrmula do coeficiente a_n para todo n.

Resposta:

Como $f(0) = a_0 = 1$, $f'(0) = a_1 = 0$, aplicando os resultados do item (a), temos

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(4)(3)} x^4 + \frac{2}{(8)(7)(4)(3)} x^8 + ...$$

O seguinte termo não nulo da série é o de grau 12. A fórmula geral do termo a_n é

$$a_n = 0$$

se n não é múltiplo de 4,

$$a_{4N} = \frac{1}{2b_N}$$

onde $b_N = \prod_{i=1}^{N} (4i)(4i-1)$.