Solução do P3 de cálculo B de 2009.1

Sem maple 6 pontos.

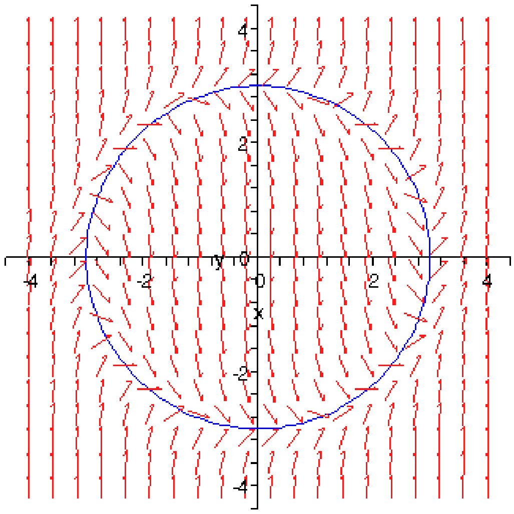
3. calcule as integrais $\int x^2 e^x dx$ e $\int \frac{dx}{4x^2+9}$
valor 1 ponto

I1= $\int x^2 e^x dx$ integramos por partes, fazendo u= x^2 e dv= e^xdx. Logo du=2xdx e v = e^x. Então:
I1=x^2e^x – 2 $\int x\ e^x dx$ fazendo por partes outra vez com u=x e dv= e^xdx., temos du=dx e v=e^x . Logo I1= x^2e^x – 2xe^x+2 $\int e^x dx$ = x^2e^x – 2xe^x+2e^x +C

I2=$\int \frac{dx}{4x^2+9}$ Queremos transformar em $\int \frac{du}{u^2+1}$ que dá arctan(u). Começamos fazendo v=2x, logo dv= 2dx . obtendo I2=$\int \frac{dv/2}{v^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2+9} = \frac{1}{18}\int \frac{dv}{v^2/9+1}$
Faço agora u=v/3, logo du=dv/3 e segue I2=$\frac{1}{18}\int \frac{3du}{u^2+1}$= (1/6) arctan(u) +C , ou seja (1/6) arctan(2x/3) +C.
Depois de chegar em $\frac{1}{18}\int \frac{3du}{u^2+1}$, poderia ser feita a substituição u=tan(t), que conduz a $\frac{1}{6}\int dt$, que leva à mesma resposta.

4)Considere a equação diferencial y´= x^2+y^2-9. Faça um figura, indicando onde as soluções da eq são crescentes, e onde são decrescentes.
Explique porque a solução que passa em (0,0) não pode passar também em (10,-2).
Valor 1,5 pontos

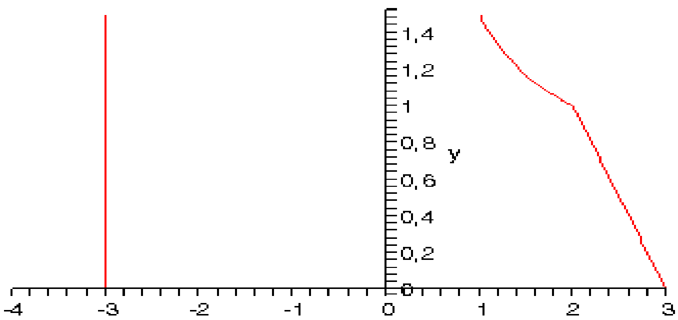
y´=0 sobre o círculo $x^2+y^2=9$, y´<0 dentro do círculo e y´>0 fora do círculo. A figura fica então:



A solução que começa em (0,0) vai descer até sair do círculo, e depois começa a subir. Neste ponto o valor de y já é maior que -3, logo não pode logo y não chega em -4.

5. Seja C o gráfico de f definido por:
Se 1<x<2 então f(x)=1/x+1/2
Se 2<x<3 então f(x)=3-x
Obtenha o volume do sólido gerado pela rotação da curva C em torno da reta x=-3.
Valor 1,5

Vamos fazer o gráfico de f e a reta x=-3.



Vamos usar o método das cascas, lembrando que como vamos girar em torno da reta x=-3, o raio do cilindro correspondendo à posição x é 3+x. Fica então:

$$V= \int_1^3 2\pi(x+3)f(x)dx = \int_1^2 2\pi(x+3)(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})dx + \int_2^3 2\pi(3+x)(3-x)dx$$

$$= \int_1^2 2\pi\left(1+\frac{3}{x}+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)dx + \int_2^3 2\pi(9-x^2)dx =$$

$$2\pi\left[\frac{5x}{2}+3\ln(x)+\frac{x^2}{4}\right]_1^2 + 2\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3 =$$

$$2\pi(\frac{17}{4}+3\ln(2)+27-\frac{27}{3}-18+\frac{8}{3}) = 2\pi(3\ln(2)+71/12)$$

6. A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura y(t) de um objeto no instante t é o produto de uma constante k pela diferença entre a temperatura do objeto no instante t e a temperatura do ambiente T. Suponha que uma mãe dedicada serve uma sopa a 80 graus na sala de jantar, cuja temperatura é de 20 graus.

a) Escreva uma equação diferencial para a temperatura y(t) da sopa em cada instante t de tempo.

b) O filho mais novo da familia não gosta de sopa, e depois de 20 minutos olhando seu prato a sopa dele estava a 40 graus de temperatura. Calcule a constante k da equação do item 1. Qual será a temperatura dessa sopa depois de uma hora na mesa?

Valor 2 pontos.

A eq. dif é $\frac{dy}{dt} = k(y-T)$ e como T=20, temos y´=k(y-20).

È uma equação de variáveis separáveis, que se escreve $\frac{dy}{y-20} = kdt$, cuja solução é Ln(|y-20|)=kt+C ou seja y-20=C_1e^{kt}, já que podemos supor y-20>0, pois a sopa está inicialmente a 80 graus e a solução que começa em y=80 não pode cortar a solução constante y=20.

Então temos y(0)=80 e y(20)=40 , ou seja 80-20=C_1 e 40-20=$60e^{20k}$ .Logo, e^{20k}= 20/60, ou seja k=-Ln(3)/20.

Depois de uma hora, temos y=20 + $60e^{60k}$ =20 + 60 $(e^{20k})^3$ = 20 + 60 $(1/3)^3$ = 20 + 60/27 = 22+ 6/27 graus. O que dá aproximadamente 22,22 graus.